DISZKRÉT MATEMATIKA II

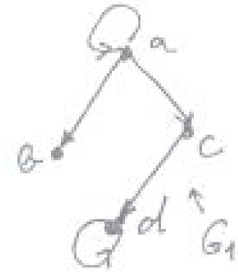
II előadás

1. Részgráf, feszített részgráf

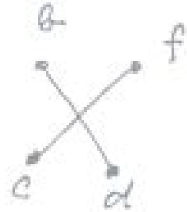
A $G'=(V',E')$ gráf a $G=(V,E)$ gráf részgráfja, ha $V'\subseteq V$, és $E'\subseteq E$

Pl:

részgráfja



vagy

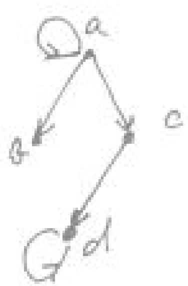


részgráfja

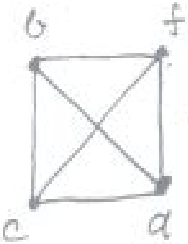
- G' feszített részgráfja G-nek, ha a V'-beli csúcspontokkal együtt mindazon G-beli éleket is tartalmazza, amelyek két V'-beli csúcshoz illeszkednek (azaz amelyet két V'-beli csúcs kifeszít)

Pl:

feszített részgráfja



vagy

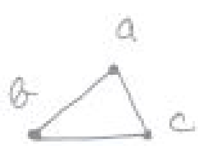


feszített részgráfja G_2-nek

Két részgráfot diszjunktnak nevezünk, ha nincs közös csúcspontjuk sem pedig olyan él ami az egyik gráf egyik csúcsát összekötné a másik gráf egy csúcsával.

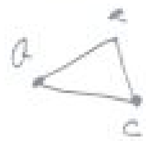
Pl.: a G_7

gráfban



és

diszjunkt részgráfok, de



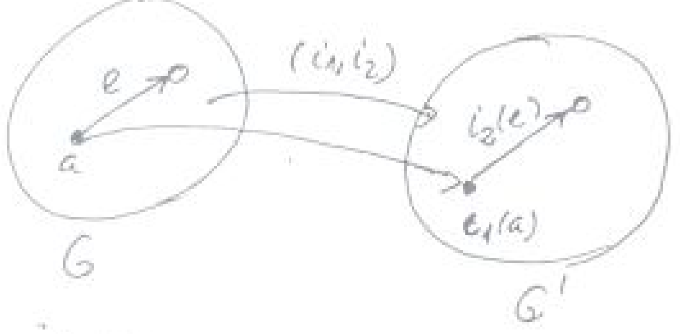
és

vagy

és

már nem.

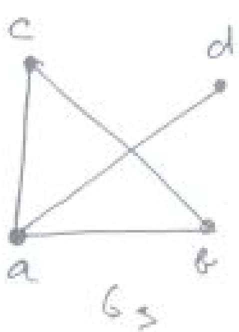
2. Izomorf gráfok: A $G=(V,E)$ és $G'=(V',E')$ gráfok izomorfok ha van olyan $i_1: V\to V'$ és $i_2: E\to E'$ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, hogy ha az $a\in V$ csúcshoz egy $e\in E$ illeszkedik G-ben, [illegible] illeszkedik G'-ben.



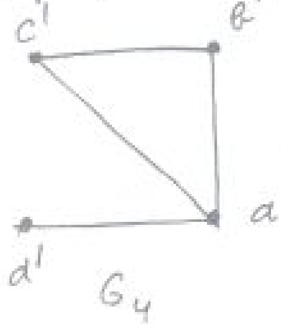
Például az

és a

gráfok izomorfok, az alábbi gráfok közül, pedig



$\cong$



$\ncong$

G_3 és G_4 izomorfak ($G_3 \cong G_4$) de G_5 nem izomorf a másik kettő közül egyikkel sem.

<u>3. Fogalom</u>: A $G=(V,E)$ irányított $a \in V$ csúcspontjának a <u>kifoka</u> az a-ból kiinduló élek száma, jele $d_G^-(a)$,
<u>befoka</u> pedig az a-ba befutó élek száma, jele $d_G^+(a)$.

Pl a G_1 gráfban $d_G^-(a) = 3 \quad d_G^-(b) = 0$

$d_G^+(a) = 1 \quad d_G^+(b) = 1, \ d_G^+(d) = 2$

<u>Állítás 1</u>: Bármely irányított gráfban a csúcspontok befokainak az összege és a csúcspontok kifokainak az összege egyaránt egyenlő az élek számával:

$$\sum_{a \in V} d_G^-(a) = \sum_{a \in V} d_G^+(a) = |E|$$ ← élek száma

Biz: Minden él pontosan egy csúcspontból indul ki (és egy csúcspontba fut be.) Ezért pl. ha a $\sum_{a \in V} d_G^-(a)$ összeget kiszámítjuk, a pontokat bejárva minden élet számbaveszünk és egyiket sem számítjuk be kétszer (ugyanis egyik sem indulhat ki egyszerre két csúcspontból). Így kapjuk a $\sum d_G^-(a) = |E|$ összefüggést. A másik egyenlőséget hasonlóan igazoljuk.

Irányítatlan gráf esetén az $a \in V$ csúcsponthoz illeszkedő élek száma az a pont foka, jele $d_G(a)$. Így az Állítás 1-ből azonnal kapjuk a következőt:

Állítás 2: Egy $G=(V,E)$ irányítatlan gráfban a pontok fokszámainak az összege az élek kétszeres számával egyenlő.

Tehát: $\sum_{a \in V} d_G(a) = 2|E|$

Egy n csúcspontú (irányítatlan) gráfot teljes gráfnak nevezünk, ha bármely két pontot él köti össze. Az n pontú irányítatlan és egyszerű teljes gráf jele K_n. Ebben minden pont fokszáma (mivel hurokélek nincsenek) $n-1$. Így az élek száma $|E| = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$.

Így pl. K_5 esetén

$|E| = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10.$

Következmény: Minden egyszerű irányítatlan n-csúcspontú gráfnak legfeljebb $\frac{n(n-1)}{2}$ éle van.

Pl.: Az előző G_2 gráf esetén $|E| = 8 < 10$.

4. Séták és utak

Legyen $G=(V,E)$ egy tetszőleges (irányított) gráf és $a, b \in V$.

1. Definíció: (i) A G gráfban az $a \in V$ és $b \in V$ pontokat összekötő sétán egy olyan $S: x_0 e_1 x_1 e_2 x_2, \ldots, x_{n-1} e_n x_n$ sorozatot értünk ahol $a = x_0$, $b = x_n$ és minden $1 \le i \le n$-re $x_i \in V$, $e_i \in E$ és $e_i = (x_{i-1}, x_i)$ irányított él

(ii) a séta zárt séta, ha $a = b$

(iii) Az (i) pontbeli sétát útnak nevezzük ha az $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ pontok mind különbözőek.

(iv) Ha $a = x_0 = x_n = b$, többi (belső) $x_1, \ldots, x_{n-1}$ csúcspont pedig mind páronként különböző akkor (irányított) körről beszélünk.

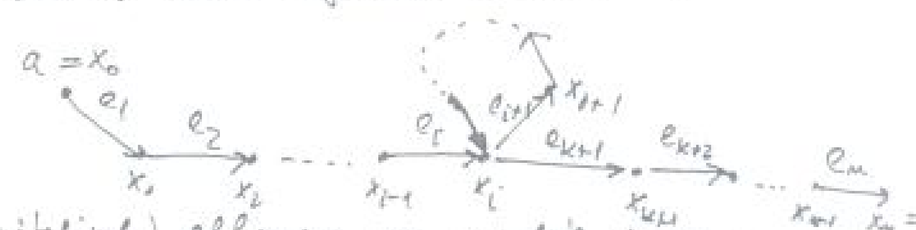
2. Definíció (i) a $G=(V,E)$ ~~irányítatlan~~ irányított gráfban az $a,b\in V$ csúcspontokat összekötő irányítatlan séta egy olyan $a=x_0e_1x_1e_2x_2,\dots,x_{n-1}e_nx_n=b$ sorozat ahol minden $1\le i\le n$-re $x_i\in V$, $e_i\in E$ és vagy $e_i=(x_{i-1},x_i)$ vagy $e_i=(x_i,x_{i-1})$

$$x_{i-1}\xrightarrow{e_i}x_i \quad \text{vagy} \quad x_{i-1}\xleftarrow{e_i}x_i$$

(ii) Hasonlóan az élek tetszőleges (és különböző) irányítását megengedve definiálhatjuk az irányítatlan út, zárt séta és kör fogalmát.

Megjegyzés (1) Egy $G=(V,E)$ irányítatlan gráfban a fenti fogalmakat ugyanígy definiáljuk. Nyilvánvalóan, itt az irányított és irányítatlan séta, az irányított és irányítatlan út vagy kör fogalmai egybeesnek.

(2) Ha az $a,b\in V$ pontokat összeköti G-ben egy irányított (vagy irányítatlan) séta, akkor a-t és b-t összeköti egy irányított (v. irányítatlan út is).
Valóban, ha az x_i pont az útvonal során legalább kétszer előfordul akkor az útvonal tartalmaz egy x_i-ben induló zárt sétát.

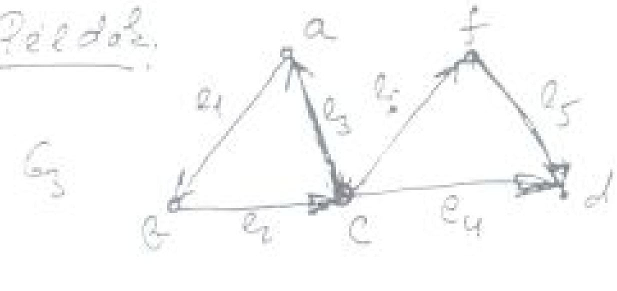


Ennek csúcsait és éleit (x_i kivételével) elhagyva egy a-ból b-be vezető rövidebb irányított sétát kapunk.
Mivel G véges ezért az a-t és b-t tartalmazó irányított séták között van véges hosszúságú. Kiválasztva a legrövidebb ilyen sétát az ugyancsak véges hosszúságú lesz és a fentiek miatt nem tartalmaz hurkot, azaz egyetlen x_i sem ismétlődik — így ez egy a-t b-vel összekötő út!

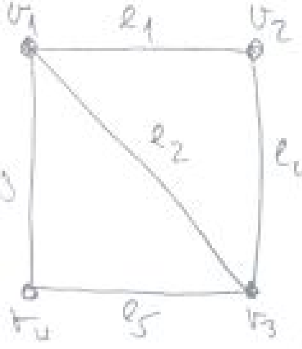
(3) A definícióban szereplő n-számot (ami megegyezik az élek tartozó élek számával) a megfelelő irányított v. irányítatlan séta, út, kör, stb. hosszának nevezzük.

(4) Nyilvánvaló egy út mentén (kör mentén) nem ismétlődhetnek csúcspontok, de élek sem ismétlődhetnek (hiszen akkor valamely csúcspontoknak is ismétlődnie kellene).

Példák.



G_3-ben $ae_1be_2ce_4d$ egy irányított út
$ae_1be_2ce_6fe_5de_4c$ egy irányítatlan s-
$ae_1be_2ce_3a$ egy irányított kör
$ae_1be_2ce_4de_5fe_6ce_3a$ — egy irányítatlan zárt séta.



G_4

Ebben a egyszerű irányítatlan gráfban például $v_1 e_1 v_2 e_4 v_3 e_2 v_1$ egy (irányítatlan) kör, $v_1 e_1 v_2 e_4 v_3 e_2 v_1 e_3 v_4 e_5 v_3$ egy v_1-et és v_3-at összekötő séta ami a gráf valamennyi élét tartalmazza.

5. Összefüggőség

A) Irányítatlan gráfok: Azt mondjuk hogy a $G=(V,E)$ irányítatlan gráf összefüggő ha bármely két különböző $a, b \in V$ pontjához létezik őket összekötő séta G-ben.

Megj.: Az előbbiek alapján, ha létezik a-t b-vel összekötő séta G-ben, akkor létezik a-t b-vel összekötő út is és ez nem más mint egy minimális hosszúságú séta a és b között.

B) Irányított gráfok: Ha $G=(V,E)$ egy irányított gráf, akkor azt mondjuk, hogy G gyengén összefüggő, ha G-ből az irányítás „törlésével" nyert irányítatlan gráf összefüggő, és azt mondjuk hogy G erősen összefüggő, ha G bármely két $a, b \in V$ csúcspárja esetén létezik G-ben egy a-ból b-be vezető irányított séta.

Megj.: (i) Míg a gyengén összefüggő irányított gráf esetén elég ha $a \in V$-t és $b \in V$ összeköti valamilyen élsorozat, addig az erősen összefüggő gráfok esetén mind a-ból b-be mind b-ből a-ba kell vezetnie egy-egy olyan irányított élsornak amelyen a az ott elhelyezkedő élek „irányítása" megegyezik a séta irányával.

(ii) Nyilvánvaló hogy minden erősen összefüggő irányított gráf az gyengén is összefüggő, irányítatlan gráf esetén pedig a két fogalom egybeesik.

(iii) Az összefüggőség definícióiban az irányított séta, séta fogalmát ~~...~~ az irányított (irányítatlan) út fogalmával is helyettesíthetjük.

Példák:
- G_3 egy gyengén összefüggő de nem erősen összefüggő gráf
- Minden irányított kör egy erősen összefüggő irányított gráf: 

- G_4 egy összefüggő irányítatlan gráf.

Tétel: Minden irányítatlan $G=(V,E)$ gráf páronként diszjunkt összefüggő részgráfok egyesítése. Ez a felbontás egyértelmű a kapott részgráfok pedig G maximális összefüggő részgráfjai (komponensei).

Bizonyítás: A pontok V halmazán értelmezzük a $\varrho \subseteq V \times V$ bináris relációt a köv. képpen: $a,b \in V$-re $\ulcorner a\varrho b$ ha vagy $a=b$ vagy a-t b összeköthető G-ben egy séta segítségével.

Akkor $\ulcorner a \varrho a \urcorner$ (ϱ reflexív) def. szerint minden $a \in A$-ra

$a\varrho b \Leftrightarrow b \varrho a \urcorner$ (ϱ szimmetrikus) minden $a,b \in V$-re

Legyen $a\varrho b$ és $b \varrho c$ valamely $a,b,c \in V$ pontokra. Ha a 3 pont közül 2 egybeesik, akkor könnyű ellenőrizni hogy $a\varrho c$. Amennyiben mind különböző tekintsük az a-t b-vel összekötő s_1 és a b-t c-vel összekötő s_2 sétát. $a \overset{s_1}{\rightsquigarrow} b \overset{s_2}{\rightsquigarrow} c$. De akkor a két séta egyesítése $s_1 \cup s_2$ egy újabb séta G-ben ami összeköti a-t és C-t. Tehát ϱ tranzitív és – így ϱ ekvivalencia reláció. Jelöljük ekvivalenciaosztályait $V_1, V_2, \dots V_n$-el, a hozzájuk tartozó feszített részgráfok pedig legyenek $G_1=(V_1,E_1), \dots, G_n=(V_n,E_n)$

A tanultak alapján V a V_i-k diszjunkt egyesítése $V = \dot{\bigcup}_{i=1}^{n} V_i$ és $V_i \cap V_j = \emptyset$ ha $i \neq j$.

Vegyük most észre, hogy bármely $a \in V_i$-elemet, csak V_i-beli elemmel köthet össze séta: Valóban, ha a-t b-vel egy s séta köti össze, akkor $a\varrho b$, így

$b \in \varrho[a] = V_i$. Ez azt jelenti hogy egyetlen $a \in V_i$-t sem köthetők össze él egyetlen $b \notin V_i$-vel sem. Így a G_i és G_j gráfok $(i \neq j)$ pontjai között sem feszülhet él, tehát G_i és G_j mint gráfok is diszjunktak.

Az elmondottakból az is következik, hogy G-beli él csak azonos G_i-beli pontok között haladhat, így $E = E_1 \cup \dots \cup E_n$, tehát $G = G_1 \cup \dots \cup G_n$. Másrészt bármely G_i bármely két $x,y \in V_i$ pontját összekötő G-ben egy s séta. Mivel s-nek minden pontja a fentiek szerint csak V_i-ben lehet, minden éle is V_i-ből való, így s G_i-ben is egy séta. Tehát minden G_i önmagában is összefüggő. Minden G_i maximális összefüggő részgráfja G-nek. Ha ugyanis lenne olyan C összefüggő részgráfja G-nek hogy $G_i \subset C$, de $C \neq G_i$, akkor minden $a \in V_i$ és minden $x \in C \setminus G_i$ pontot egy séta kötne össze G-ben, ennek viszont az ellentmondana, mert $x \notin G_i$. Mivel egy ekvivalencia relációhoz

Következmény 1: Ha a és b az G irányított gráf különböző összefüggő komponenseihez tartoznak, akkor nem köthető össze egy sétával.

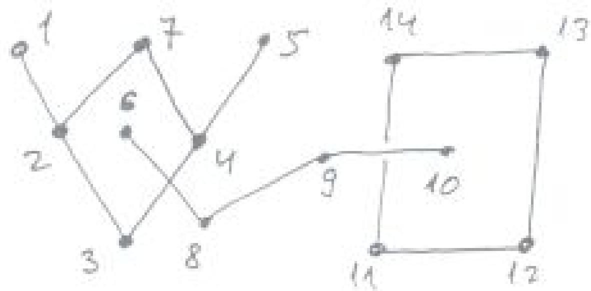
Következmény 2: Minden irányított gráf gyengén összefüggő komponenseinek a diszjunkt egyesítése. Ezek a részgráfok egyértelműek és az eredeti gráf maximális gyengén összefüggő részgráfjai. Két komponenshez tartozó két pont nem köthető össze sem irányított sem irányítatlan sétával.

Bizonyítás: Tekintsük a $G=(V,E)$ irányított gráfot. Az irányítás eltörlése után kapott $G'=(V,E')$ irányítatlan gráf összefüggő komponensei ugyanazok mint G gyengén összefüggő komponensei. Így a következmény 2. azonnal adódik a Tétel 1 és a következmény 2 alkalmazása szerint.

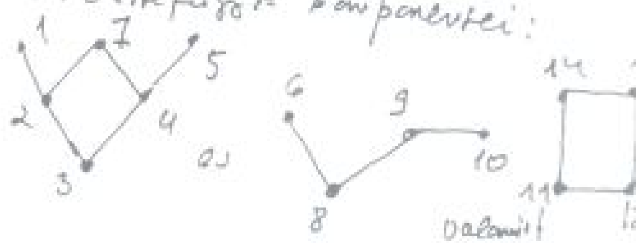
A Tétel 1-hez hasonlóan igazolható az alábbi

Tétel 2: Minden irányított gráf erősen összefüggő komponenseinek a (diszjunkt és) egyértelmű egyesítése. Ezek az összefüggő részgráfok az eredeti gráf maximális méretű erősen összefüggő részgráfjai.

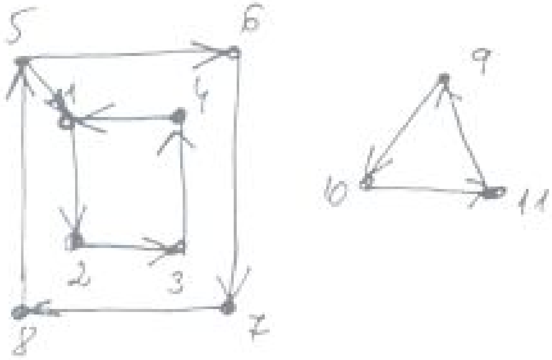
1. Példa:



Ennek az irányítatlan gráfnak az összefüggő komponensei:



2 Példa:

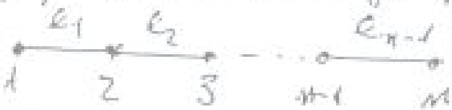


Ennek a gráfnak két gyengén összefüggő komponense van, az első csúcshalmaza $V_1 = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, a másiké pedig $V_2 = \{9,10,11\}$

A gráfnak 3 erősen összefüggő komponense van, ezek csúcshalmazai $K_1 = \{1,2,3,4\}$, $K_2 = \{5,6,7,8\}$, $K_3 = V_2 = \{9,10,11\}$.

4. Fák

Természetes módon vetődik fel az a kérdés hogy egy n pontú (irányítatlan) gráf legkevesebb hány él mellett lehet még összefüggő? (A józan szemlélet azt sugallja, hogy ehhez legfeljebb $n-1$ élet mint például az alábbi ábrán



A legkisebb élszámú irányítatlan összefüggő gráfok tanulmányozása az ún. „fák" tanulmányozásához vezet.

Definíció: A hurokmentes, körmentes, összefüggő irányítatlan gráfokat fáknak nevezzük.

Példák

ábra 1 ábra 2 ábra 3 ábra 4.

Tétel 1: Legyen $G=(V,E)$ egy irányítatlan, hurokélt és többszörös élt nem tartalmazó gráf. Ekkor ekvivalensek az alábbi állítások:

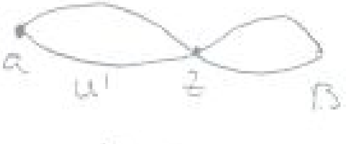
(a) G fa

(b) G bármely két különböző pontja között pontosan egy út vezet

(c) G összefüggő, de bármely élét elhagyjuk, a keletkező gráf már nem marad összefüggő

(d) G körmentes, de bármely új él hozzávétele után a keletkező gráf tartalmaz kört (új élen itt nem hurokélt értünk.)

Bizonyítás: (a) $\Rightarrow$ (b). Tegyük fel, hogy G fa. Az összefüggőség miatt G bármely két pontja között vezet út. Tegyük fel hogy a (b) állítással ellentétben G-nek van olyan (különböző) pontjai melyek között több út is vezet. Válasszunk ki most olyan $a, b \in V$, $a \neq b$ csúcspontokat és olyan a-ból b-be vezető u és v utakat amelyek hosszainak az összege minimális a G gráfra nézve. Ekkor u-nak és v-nek a végpontjaikat kivéve nem lehet még egy z közös pontja ($z \in V$). — Ugyanis

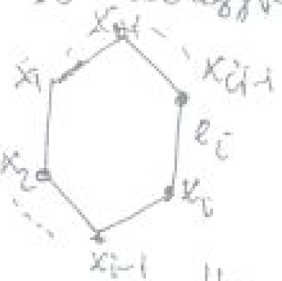


ellenkező esetben az 5. ábrán látható módon az a-t és z-t összekötő ~~...~~ u' és v' utak hosszainak az összege az u és v utak hosszainak összegénél kisebb len…

Így kivéve egy a-n és b-n átmenő kört kapunk G-ben, ami ellentmond annak, hogy G fa.

(b) ⇒ (c) Tegyük fel hogy (b) teljesül a G gráfra. Ekkor G nyilván összefüggő. Legyen most $e=\{a,b\}$ a gráf egy éle. Mivel feltevés szerint e az egyetlen út a és b között, e-t elhagyva a G gráf már nem maradhat összefüggő.

(c) ⇒ (a) Tegyük fel hogy (c) teljesül $G=(V,E)$-re és lássuk be, hogy a gráf ekkor körmentes. Ha lenne G-ben egy kör akkor ennek egy élét elhagyva a keletkező G' gráf összefüggő maradna mert például az $x_1e_1x_2e_2\dots x_ie_ix_{i+1}\dots x_{n-1}e_{n-1}x_n$, $x_n=x_1$ kör esetén az $e_i=(x_i;x_{i+1})$ élét elhagyva x_i-t és x_{i+1}-et még mindig össze lehet kötni az $x_i, x_{i-1},\dots x_2, x_1, x_n, \dots x_{n-1},\dots x_{i+1}$ útvonalon, így G összefüggő maradna ellentétben (c)-vel.



b) ⇒ d) Ha b teljesül G-re, akkor G nyilván körmentes. Ha most egy tetszőleges $e=(a,b)$ $a\neq b$ új élet hozzáveszünk G-hez, mivel G-ben létezett a-t b-vel összekötő út, és persze e-t nem tartalmazhatta – ezért ehhez az úthoz hozzávéve az $e=(b,a)$ élet most egy a-ban záródó kört kapunk.

(d ⇒ a) Tegyük fel hogy (d) teljesül G-ben, elég most azt megmutatni, hogy G összefüggő akkor bármely két különböző $a, b \in V$, $a\neq b$ pontját összeköti egy út. Ez nyilvánvaló ha az $e=\{a,b\}$ él eleme E-nek. Ha nem akkor tegyük hozzá az $e=\{a,b\}$ élt a gráfhoz. Feltevés szerint így egy olyan G' gráfot kapunk amiben már van kör. Ez nyilván tartalmazza az új élt (hiszen az eredeti gráfban nem volt kör) így átmegy a-n és b-n. De akkor a körnek az $e=(a,b)$-n kívüli élei nyilvánvalóan egy a-ból b-be vezető utat alkotnak az eredeti G gráfban. Tehát G összefüggő.

Következmény: 1) Minden fa egy minimális élszámú összefüggő gráf.
2) Minden fa egy maximális élszámú körmentes gráf.

Állítás: Minden fa tartalmaz legalább két elsőfokú pontot.

Biz: Tekintsük a $G=(V,E)$ (véges) fában létező utak halmazát

Mivel egy véges gráf csak véges sok különböző út van (legalább) egy maximális hosszúságú. Legyen ez az út $u = a_1 e_1 a_2 e_2 a_3 \dots a_n e_n a_{n+1}$. Vegyük észre hogy a_1-et illetve a_{n+1}-et nem köti össze él egyetlen a_i $(i \in \{3, \dots n\})$ ponttal sem, ugyanis ez első esetben például $a_1 e_1 a_2 \dots a_{i-1} e_i a_i e a_1$ kör lenne (ahol $e = (a_1, a_i)$) ami ellentmondás. Így a_1-ből (és a_{n+1}-ből) csak valamely külső pontba vezethet él. De akkor u-hoz az $a_1 e b$ vagy $a_{n+1} e b$ ~~utat~~ utak csatolhatók a hossza 1-el megnövelhető lenne ami ellentmondás. Így a_1-hez nem illeszkedhet más él csak $e_1 = (a_1, a_2)$ és a_{n+1}-hez pedig $e_n = (a_n, a_{n+1})$. Ez azt mutatja hogy mind a_1, mind a_{n+1} a gráf egy-egy elsőfokú pontja. Mivel u nem kör $a_1 \neq a_{n+1}$.

Tétel 2: Minden n pontú fának pontosan $n-1$ éle van.

Bizonyítás – teljes indukcióval történik.

az $n=1$ • és $n=2$ a e b esetekben az állítás nyilvánvaló

Tegyük fel, hogy az állítás az $n = 1, 2, \dots, k$ pontszámú gráfokra mind igaz és igazoljuk $k+1$-re.

Legyen tehát $G = (V, E)$ egy $k+1$ ($k \geq 2$) csúcspontú fa, Megmutatjuk hogy G éleinek a száma $k+1-1 = k$.

Az állítás értelmében V-ben találhatunk legalább egy elsőfokú pontot legyen ez $a \in V$. Akkor az a csúcspont egyetlen e_a éllel kötődik a gráf többi részéhez. a-t és e_a-t elhagyva egy $G' = (V', E')$ fát kapunk (hiszen a gráfösszefüggő marad és kör nem keletkezik) amely gráf

pontjainak a száma $= k$. De akkor G' éleinek a száma feltevés szerint $k-1$.

Mivel $V' = V \setminus \{a\}$ és $E' = E \setminus \{e_a\}$, G-nek pontosan eggyel több (csúcsa és) éle van így G éleinek a száma száma k.

Az előbbiek alapján viszonylag könnyen igazolhatók az alábbi:

Tétel 3: Ekvivalensek az alábbi állítások

a) G gráf fa.

b) G egyszerű összefüggő és $n-1$ éle van

c) G körmentes összefüggő és $n-1$ éle van

Következmény: Egy egyszerű összefüggő gráfnak legalább $n-1$ éle van, egy körmentes (és hurokmentes) gráfnak legfeljebb $n-1$.