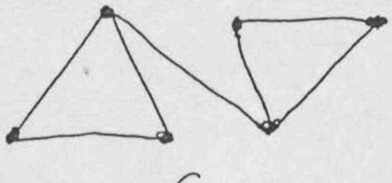
III. előadás

1. Síkgráfok

Azokat az (irányítatlan) gráfokat amelyek síkba rajzolhatók úgy, hogy élei ne messék egymást, síkgráfoknak nevezzük.

Pl:

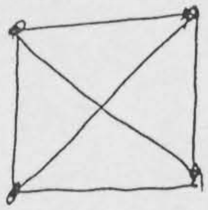


G_1

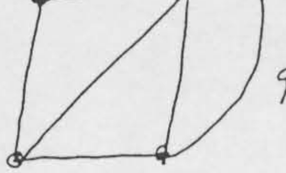
Mit jelent az, hogy egy gráf nem síkgráf?

Valójában arról van szó, hogy egyetlen $G=(V,E)$-vel izomorf gráf sem létezik amit le lehetne úgy rajzolni, hogy élei ne messék egymást.

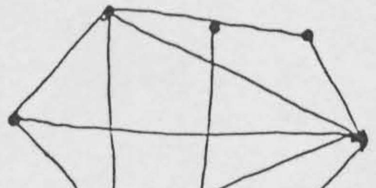
Pl. K_4



Síkgráf mert izomorf a

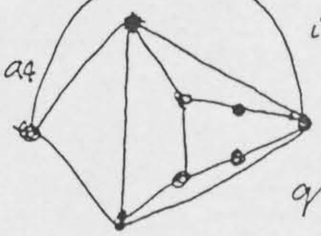


gráffal



G_2

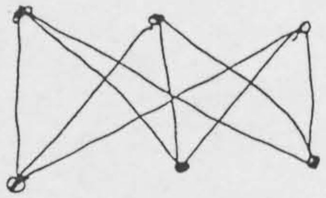
ez is síkgráf, hiszen izomorf az



itt mellőzött

gráffal

Nem síkgráf például $K_{3,3}$



Ennek a neve a „3-ház 3-kút" gráf

Legyen $G=(V,E)$ egy irányítatlan gráf. A gráf egy tartományának nevezzük egy kör által határolt részét, amelyet további élek nem osztanak kisebb körökre. Síkgráf esetén a gráf külső tartományának nevezzük a sík mindazon pontjait melyek nem tartoznak a gráfhoz.

A síkgráfok egy sajátossága az, hogy minden olyan élük amely egy ~~körnek~~ ~~része~~ pontosan két tartomány határán helyezkedik el

Euler poliéder tétele

Legyen $G=(V,E)$ egy irányítatlan gráf és jelölje $|V|$ a G pontjainak, $|E|$ az éleinek és $|t|$ a gráf tartományainak a számát.

Tétel (Euler) Ha G egy összefüggő síkgráf akkor: $|t|+|V|=|E|+2$

Egy konvex poliéder pontjaira éleire és lapjaira is igaz.

Bizonyítás: Tekintsük a G gráf egy C körét és ennek egy e élét. C kör a síkot két tartományra osztja. Ezeket más élek továbbá tartományokra oszthatják, de mindkét tartományban van egy-egy olyan résztartomány aminek az „e" él a határa. Ha e-t elhagyjuk, a két tartomány egyesül, azaz a tartományok száma eggyel csökken. A pontok száma nem változik, az élek száma pedig ugyancsak eggyel csökken, tehát az e él elhagyásával a $|V|-|E|+|t|$ érték nem változik.

Az eljárást addig folytatjuk amíg egy $G^*=(V^*,E^*)$ gráfhoz jutunk, amiben már nincs kör. Ekkor $|V^*|=|V|$ és

$|V^*|-|E^*|+|t^*|=|V|-|E|+|t|$

Mivel minden G-beli körnek (minden lépésnél) csak 1 élét szüntettük meg, ha G összefüggő volt, összefüggő is maradt. Így az eljárás végén kapott G^* gráf összefüggő és körmentes az ezért nem más mint egy fa. Mivel minden fának eggyel kevesebb éle van mint pontja ezért $|V^*|-|E^*|=1$. G^* tartományainak a száma 1 (a külső tartomány maradt csak) De akkor

$|V|-|E|+|t|=|V^*|-|E^*|+|t^*|=1+1=2$, ahonnan megkapjuk a kívánt $|V|+|t|=|E|+2$ összefüggést.

Megjegyzés: A tétel nevét annak kapta hogy benne megfogalmazott összefügg[illegible] [illegible]ex poliéder lapjaira, csúcspontjaira és éleire.

legalább 3 pontú

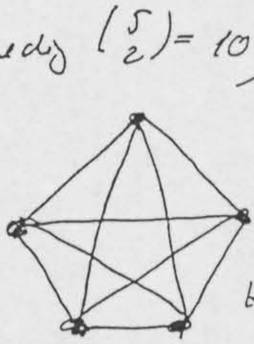
Állítás: Ha $G=(V,E)$ egyszerű síkbarajzolható gráf akkor $3|t| \leq 2|E|$

Biz: G minden tartományát legalább 3 él határolja. Ha ezeket megjelöljük, akkor minden élet legfeljebb kétszer vehetünk számba, hiszen minden él legfeljebb csak két tartomány határában tartozhat közzé. Így $|E| \geq \frac{3|t|}{2}$ ahonnan $3|t| \leq 2|E|$.

Tétel: Ha a $G=(V,E)$ egyszerű összefüggő síkgráf pontjainak a száma legalább 3, akkor $|E| \leq 3|V|-6$.

Bizonyítás: Láttuk, hogy $3|t| \leq 2|E|$, Euler tételéből pedig azt kapjuk, hogy $|t| = |E|-|V|+2$. Így azt kapjuk, hogy:
$3(|E|-|V|+2) \leq 2|E|$, azaz $3|E|-3|V|+6 \leq 2|E| \Rightarrow$
$\Rightarrow |E| \leq 3|V|-6$.

Alkalmazás: A teljes ötszög nem síkgráf!
Valóban K_5 pontjainak a száma $|V|=5$, éleinek a száma pedig $\binom{5}{2}=10$,
de $10 \not\leq 3\cdot 5-6=9$!
Így az utóbbi tétel értelmében K_5 nem lehet síkgráf.



K_5.

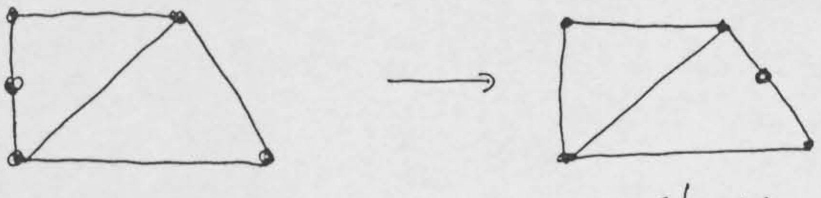
Következmény: Ha G egyszerű összefüggő síkgráf, akkor a pontjainak a minimális fokszáma legfeljebb 5.

Bizonyítás: Tegyük fel ennek az ellenkezőjét, azaz hogy G minden pontjának a fokszáma nagyobb 5-nél, azaz legalább 6.
Akkor $\sum_{a\in V} d(a) \geq 6|V|$, de $2|E| = \sum_{a\in V} d(a)$, így $2|E| \geq 6|V|$, azaz azt kapjuk hogy $|E| \geq 3|V|$ ami ellentmond az $|E| \leq 3|V|-6 < 3|V|$ összefüggésének.

2. Síkgráfok jellemzése

Topológiai izomorfizmus

Egy gráf síkbarajzolhatóságát nyilván nem befolyásolja, hogyha egy élét egy 2 fokszámú úttal helyettesítjük, azaz ha egy élét egy új 2-fokú pont felvételével két élre bontjuk, vagy ha egy 2 fokú pontjához illeszkedő két élét egybeolvasztjuk és a pontot elhagyjuk (lásd az alábbi ábrát)



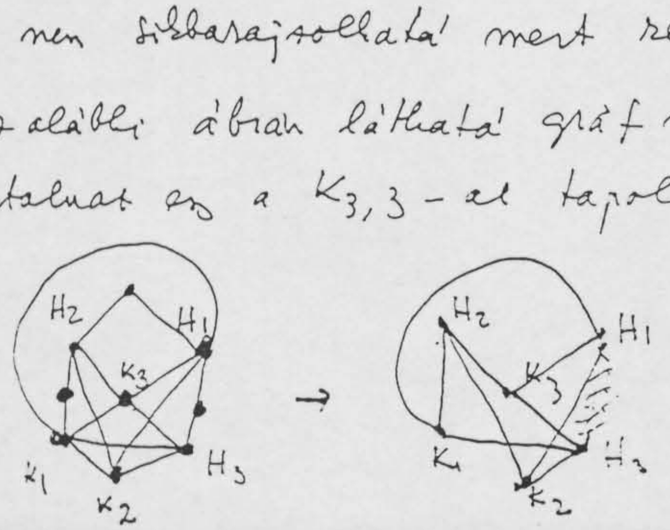
G gráf — G' gráf

Definíció: A G és H gráfokat topologikusan izomorfoknak nevezzük, ha fenti két transzformáció segítségével véges lépésben olyan G' és H' gráfokba transzformálhatók, amelyek izomorfak, azaz $G' \cong H'$!
A fenti két transformáció - egy élet egy új 2-fokú pont felvételével 2 élre bontunk.
Egy 2. fokú ponthoz illeszkedő 2. élet egyesítve a pontot elhagyjuk.

Tétel (Kuratowski) Egy irányítatlan gráf akkor és csakis akkor síkba rajzolható, ha nem tartalmaz olyan részgráfot amely topologikusan izomorf $K_{3,3}$-al vagy K_5-el.

Pl: K_6 nem síkbarajzolható mert részgráfként tartalmazza K_5-öt
- Az alábbi ábrán látható gráf nem síkbarajzolható mert tartalmaz egy a $K_{3,3}$-al topologikusan izomorf részgráfot.

G:



3 Euler vonalak és körök

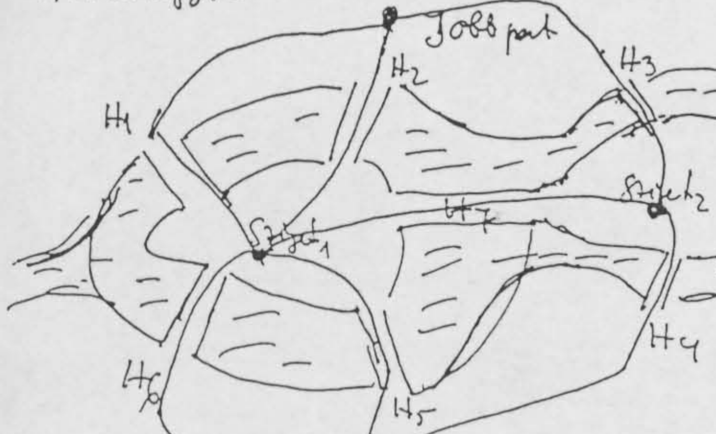
1.

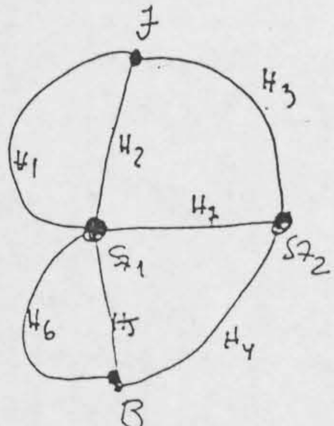
Def.
Legyen $G=(V,E)$ egy irányítatlan gráf. Egy Euler vonalon a G gráfban egy olyan $s = a_0\, e_1\, a_1\, e_2\, a_2 \dots e_m\, a_m$ sétát értünk ami a G minden egyes élét pontosan egyszer tartalmazza. Ha $a=b$ akkor Euler körről beszélünk.

Megjegyzés: Egy Euler vonal általában nem út, egy Euler kör" pedig általában nem kör, hanem egy zárt séta. A G gráfot Euler gráfnak nevezzük, ha tartalmaz Euler kört.

A fogalom Leonard Euler matematikus nevéhez kapcsolódik, aki a Königsberg-i hidak problémájának kapcsán 1736-ban az ún. egy vonallal bejárható gráfokat vizsgálta meg.

Az eredeti probléma a következő volt: Végig lehet-e menni a Königsberget átszelő Pregel folyó hét hídján úgy, hogy mindegyik hídon csak egyszer megyünk keresztül.





G gráf

Látható, hogy a probléma azzal a kérdéssel ekvivalens: a szárazföldeknek megfelelő 4 pont és a $H_1, \dots H_7$ hidaknak megfelelő 7 él alkotta gráfban van-e olyan séta, amelyen a G gráf minden egyes éle pontosan egyszer fordul elő.
Vagyis hogy a gráfban van-e Euler vonal vagy Euler kör (Amint azt látni fogjuk, ez az előbbi gráf esetén nem lehetséges)

Tétel:

1: Legyen $G=(V,E)$ egy tetszőleges ~~izolált pont~~ hurokél és izolált pont nélküli gráf G akkor és csakis akkor tartalmaz Euler kört, ha G összefüggő és minden $a\in V$ pontjának a fokszáma páros szám.

Biz:

1: Itt csak a szükségességet igazoljuk: Ha G-ben van egy zárt Euler vonal, akkor mivel ez G valamennyi élét tartalmazza, ezért G valamennyi pontját is tartalmazza így bármely $a\in V$-ből bármely $b\in V$-be ennek mentén eljuthatunk, tehát G összefüggő.

Mivel bármely $a\in V$ pont rajta van az Euler körön, ezért a-ból indulva visszajuthatunk a-ba úgy, hogy a gráf minden élét pontosan egyszer érintjük. Ha mindeközben a-n többször, mondjuk n-szer mentünk keresztül, akkor n különböző élen kellett a-ból kimennünk és ugyanannyi, azaz n élen keresztül kellett a-ba megérkeznünk. Ezeknek az éleknek az összege nem más mint az a pont $d_G(a)$ fokszáma, így $d_G(a)=n+n=2n$ - páros szám.

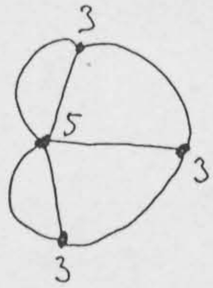
Euler vonalak: Tegyük fel most, hogy a $G=(V,E)$ gráfban van egy $a\in V$-vel kezdődő és a $b\in V$ pontban végződő Euler vonal $(a\neq b)$. Ha $(b,a)\in E$ akkor van egy Euler kör is G-ben, ha pedig $e=(b,a)\notin E$ akkor ezt az élt G éleihez hozzátéve a keletkező G^* gráfban egy Euler kört kapunk; Ez csupa páros fokszámú pontból áll, amelyek fokszáma G^*-ban ugyanaz mint G-ben, kivéve a-t és b-t, ezek G^*-beli fokszáma eggyel több mint G-ben.

A fentieket a következőképpen összegezhetjük: Csupán két eset lehetséges - vagy G valamennyi pontjának a fokszáma páros, vagy egyedül az a és b pontoké páratlan.

Következmény: Egy ~~izolált pont~~ hurokélmentes nélküli G irányítatlan gráf akkor és csakis akkor tartalmaz Euler ~~vonalat~~ ha G összefüggő és ~~ha~~ vagy minden pontjának fokszáma páros vagy pontosan 2 pont fokszáma ~~...~~ páratlan, az összes többié pedig páros.

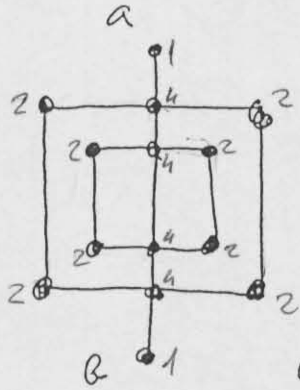
ZH

1. Példa



A Königsberg-i hidakhoz tartozó gráf esetén valamennyi pont fokszáma páratlan, ezért a gráfban nincs sem Euler kör, sem Euler vonal. ~~Ha~~ Összefüggő de minden pontjának fokszáma páratlan nincs benne sem Euler kör sem vonal

2. Példa

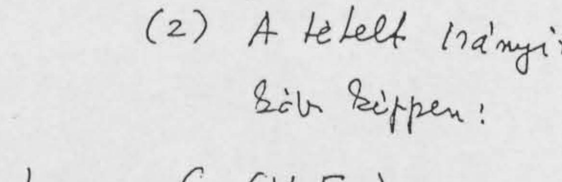


Itt olyan gráfot látunk, ahol egyedül az a és b pontok fokszáma 1, a többieké 2 vagy 4, azaz páros szám és gráf összefüggő.
Így a gráfban nincs Euler kör, van azonban (a-t és b-t összekötő) Euler vonal.

Megjegyzések: (1) Euler tétele többszörös élt tartalmazó gráfokra is igaz.
(2) A tételt irányított gráfokra is általánosíthatjuk a köv. képpen:

Tétel:* Legyen $G=(V,E)$ egy izolált pontot nem tartalmazó irányított gráf.
(i) G akkor és csakis akkor tartalmaz (irányított) Euler kört, ha G erősen összefüggő és ha minden pontjának a kifoka megegyezik a befokával.
(ii) G akkor és csakis akkor tartalmaz (irányított) Euler vonalat, ha gyengén összefüggő és ha minden pontjának a kifoka megegyezik a befokával, legfeljebb egy a és b pontpár kivételével, ahol a kifoka 1-el nagyobb az a befokánál és b kifoka 1-el kisebb a befokával.

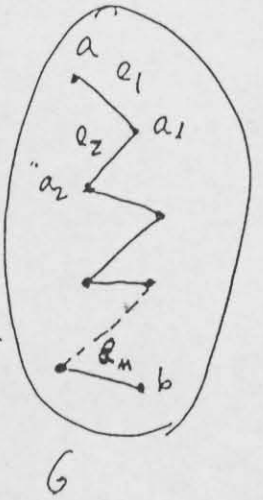
Példa:



A mellékelt gráf tartalmaz irányított Euler kört.
(A pontok be és kifokai a, b és c, d, f pontok esetében 1-1, a többi pont esetén $d_G^+(x) = d_G^-(x) = 2$)

Hamilton körök

$G=(V,E)$ irányítatlan gráf.



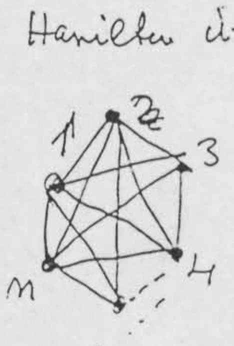
Az $s = a e_1 a_1 e_2 a_2 - \dots e_{n+1} a_{n+1} b$ séta

- Hamilton út: Ha a gráf valamennyi pontján pontosan egyszer halad keresztül.
- Hamilton kör: Ha fenti tulajdonság teljesülése mellett még $a=b$ is teljesül.

Megjegyzések: 1) Amíg az „Euler vonal", „Euler kör"- valójában egy séta (illetve zárt séta) és legtöbbször nem út, addig a Hamilton út és kör, valóban egy út és egy kör.

2) Teljes gráfban mindig van Hamilton kör:
- Ha ugyanis a pontokat tetszés szerint megszámozzuk, mivel bármely két pontot él köt össze az $1,2,3,\dots,n$ átvonal egy Hamilton kör

3) Ha egy gráfban van Hamilton kör, akkor ott egy Hamilton út is van. (A fordított összefüggés általában nem igaz.)

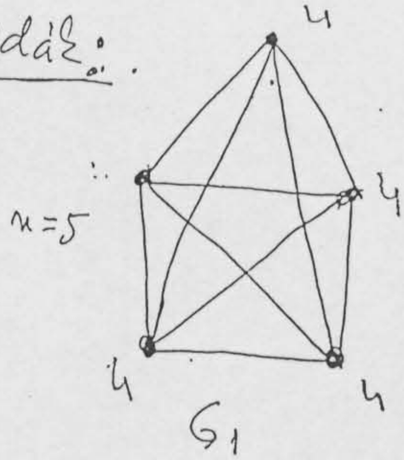


Ha mellékelt ábrán az (1, 2) élet eltávolítjuk akkor $2, 3, 4 \dots n$ egy Hamilton út.

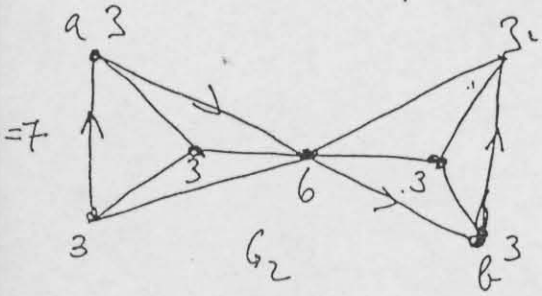
- 2) alapján úgy tűnik, hogy ha egy összefüggő gráfban „elég sok" él van, akkor van benne Hamilton kör is.

Tétel (O. Ore): Ha a G irányítatlan egyszerű gráfban minden olyan $a, b \in V$, $a \neq b$ pontpárra amire $d(a)+d(b) < n$ (a pontok száma) él köt össze akkor G-ben van Hamilton kör. (*)

Példák:



G_1-ben van Hamilton kör, az Ore féle feltétel pedig teljesül



Itt az Ore feltétel nem teljesül, ugyanis $d(a)+d(b)=6<7$, ~~de mégis~~ azonban a-t és b-t mégsem köti össze él G_2-ben. G_2-ben van Hamilton út, de nincs Hamilton kör.

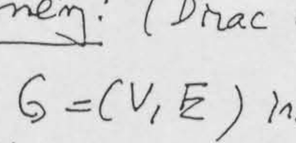
Most egy fontos és ismert következményét mutatjuk meg Ore tételének.

Következmény: (Dirac tétele)

Ha a $G=(V,E)$ irányítatlan összefüggő gráfban minden $a\in V$ pontja $d(a)\geq \frac{n}{2}$, akkor a gráfban van Hamilton kör.

Bizonyítás: Minden $a,b\in V$-re: $d(a)+d(b)\geq 2\cdot\frac{n}{2}=n$ így az Ore-féle egyenlőtlenség soha nem állhat fenn, így az az sem történhet meg, hogy két a és b-pontra amire $d(a)+d(a)<n$, ezeket nem köti össze él – hiszen ilyen pontpár nincs. Tehát Ore feltétele teljesül így G tartalmaz Hamilton kört.

Pl:



Pl $K_{3,3}$ minden $a\in V$ pontja $d(a)=3$ így $d(a)\geq\frac{6}{2}$, tehát ez gráf tartalmaz Hamilton kört.