Gráfelméleti alapfogalmak

Minden józan ítéletű ember elôtt ismeretes, hogy néhány év óta már elkezdôdött az írás magyar nyelven is, amelyet nekünk Cicero és minden műveltebb nemzet példája alapján súlyos okokból napról-napra mind jobban és jobban tôlünk telhetôleg művelni és gazdagítani kell. **Bornemisza Péter:** Üdvözlet a nyájas olvasónak. 1558.

Van aki a gráfelmélet kezdetét 1735.-re datálja, mikor is Euler megoldotta a Königsbergi-hidak problémáját. Van aki Kirchoff elektromos hálózatokra vonatkozó 1847.-ben publikált eredményeihez kapcsolja a gráfelmélet kezdetét. Mások Cayleynek egy 1857.-ben megjelent cikkét tekintik az elsô gráfelméleti tanulmánynak, melyet egy szerves-kémiai alkalmazás motivált. S természetesen olyanok is vannak akik Guthrienek (1850. körül) De Morganhoz intézett kérdésétôl számítják a gráfelmélet kezdetét. A nevezetes kérdés a négyszín-sejtés korai megfogalmazása volt. Mindenesetre talán elfogadható álláspont az, hogy a gráfelmélet valahol, valamikor megszületett és az utóbbi 50 évben egyre több helyen alkalmazzák, operáció kutatásban, elektromos hálózatok tervezésében, számítástecnikában.

A gráfokat némileg pontatlanul úgy is szokták jellemezni, mint pontok és vonalak halmazát. Emlékezve a gráfelmélet geometriai, topológiai indítatására, kezdetére. Mi itt a tárgyalás elején igyekszünk tisztán a halmazelmélet nyelvén definiálni a legtöbb gráfelméleti alapfogalmat. Természetesen nem mondunk le arról a lehetôségrôl sem, hogy felhasználjuk a matematika más területén elért eredményeket mondandónk jobb megvilágítása érdekében.

Definíció: Legyen adott az E és V diszjunkt halmazok és legyen adott az E halmaznak a VxV-be (V önmagával vett direkt szorzatába) való φ leképezése, ekkor a **G=(E,φ,V)-t irányított gráf**Hiba! A könyvjelző nem létezik.nak, nevezzük.

Az E halmaz elemeit G=(E,φ,V) gráf **él**Hiba! A könyvjelző nem létezik.einek és a V halmaz elemeit a gráf **csúcspont**Hiba! A könyvjelző nem létezik.jainak mondjuk. Ha $e \in E \;\; és \;\; \varphi(e)=(v_1,v_2)$, ahol $v_1,v_2 \in V$, akkor ezt úgy mondjuk, hogy az e él v_1 csúcs pontból kifut (kimegy), s a v_2 csúcspontba megy, v_2-be fut . A φ leképezést a gráf illeszkedési leképezésének mondjuk. A továbbiakban valamely A halmaz számosságának a jelölésére az $|A|$ szimbólumot használjuk. Itt jegyezzük meg hogy e tárgyon belül kivételes esetektôl eltekintve majdnem mindig véges halmazokkal foglalkozunk, azaz a halmazaink elemeinek a száma valamely nem negatív egész. A G=(E,φ,V) **gráf**ot **véges**nek mondjuk, ha az E és a V halmazok véges halmazok azaz $|E|,|V|<\infty$. A továbbiakban, ha csak az ellenkezôjét nem mondjuk mindig véges gráfokról beszélünk.

Definíció: A $G=(E,\varphi,V)$ **részgráf**Hiba! A könyvjelző nem létezik.jának nevezzük a $G'=(E',\varphi',V')$, ha

(i) $E'\subseteq E, V'\subseteq V$ és

(i) $(\forall e \in E') \Rightarrow (\varphi'(e)=\varphi(e))$ feltételek teljesednek.

A fenti definíciót szemléletesen úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a G gráf bármely G' részgráfját megkaphatjuk oly módon, hogy G bizonyos éleit töröljük és ugyancsak törölhetjük G valamely csúcsait is. A csúcsok törlésénél, azonban ügyelnünk kell arra, hogy az adott csúcsra illeszkedô valamennyi élt is töröljük.

Lokális tulajdonságok

Definíció: A G=(E,φ,V) irányított gráf $v \in V$ **csúcs**ának **ki fokán** a v csúcsból kifutó élek számát értjük és $\delta_{ki}(v)$-vel jelöljük.

Definíció: A irányított gráf $v \in V$ **csúcs**ának **be fokán**Hiba! A könyvjelző nem létezik. a v csúcsba befutó élek számát értjük és $\delta_{be}(v)$-vel jelöljük.

I.1.Tétel: <u>Ha</u> G=(E,φ,V) <u>véges gráf, akkor</u> $\sum_{v\in V}\delta_{ki}(v)=\sum_{v\in V}\delta_{be}(v)=|E|$.

Bizonyítás: Az élek száma szerinti teljes indukcióval bizonyítunk. Ha a G gráfnak nincs éle akkor a $\sum_{v\in V}\delta_{ki}(v);\sum_{v\in V}\delta_{be}(v);|E|$ számok rendre nullával egyenlôek, s így a tétel állítása nyilván teljesül. Tételezzük fel, hogy a tétel igaz bármely olyan G gráfra, amelynek az éleinek a száma n vagy kisebb mint n. Igazoljuk az állítást azon G gráfokra amelyeknek pontosan n+1 éle van. Legyen most adott G=(E,φ,V) és $|E|=n+1$ továbbá legyen olyan $G'=(E',\varphi',V')$ részgráfja G-nek, melyre $|E'|=n$ és V=V' teljesedik, más szóval G'-t G valamely e élének a törlésével kaptuk. Az indukciós feltevés szerint

$$\sum_{v\in V}\delta'_{ki}(v)=\sum_{v\in V}\delta'_{be}(v)=|E'|. \quad (1)$$

Azonban a G=(E,φ,V) véges gráf φ illeszkedési leképezése bármely $e \in E$ élhez egyértelműen hozzárendel egy (v_1,v_2) rendezett párt, ahol v_1 a ki fokok, v_2 a be fokok, az e él pedig az élek számát növeli egyel-egyel. Tehát ha (1)-hez 1-t adunk, akkor pont a bizonyítandó $\sum_{v\in V}\delta_{ki}(v)=\sum_{v\in V}\delta_{be}(v)=|E|$ egyenlôség adódik.

Definíció: Ha az e él ugyanabba a pontba megy vissza, amelybôl kifutott, akkor **hurokél**Hiba! A könyvjelző nem létezik.nek mondjuk azaz $\varphi(e)=(v_1,v_2) \;\; és \;\; v_1=v_2$.

Definíció: Ha az e_1 e_2 élekre $\varphi(e_1)=(v_1,v_2)$ és $\varphi(e_2)=(v_1,v_2)$, akkor az e_1 e_2 **élek**et **szigorúan párhuzamosak**nak mondjuk.

Definíció: Ha az e_1 e_2 élekre $\varphi(e_1)=(v_1,v_2)$ és $\varphi(e_2)=(v_2,v_1)$, akkor az e_1 e_2 éleket **párhuzamosok**Hiba! A könyvjelző nem létezik.nak mondjuk.

Definíció: A V halmaz önmagával vett **rendezetlen szorzat**Hiba! A könyvjelző nem létezik.án azt a halmazt értjük melynek az elemei (v_i,v_j) alakú rendezetlen párok. Jele: VrnV.

Definíció: Legyen adott az E és V halmaz és legyen adott az E halmaznak a VrnV-be (V önmagával vett rendezetlen szorzatába) való φ leképezése, ekkor a **G=(E,φ,V)-t gráf**Hiba! A könyvjelző nem létezik.nak, nevezzük.

Ha a G gráf nem irányított gráf, akkor nincs értelme szigorúan párhuzamos élekrôl beszélni. egyszerűen párhuzamos élt esetleg többszörös élt mondunk. Nyilván a hurok él fogalma irányított és irányítatlan gráf esetén ugyanaz. Ha valamely G gráfban nincs sem párhuzamos, sem hurok él, akkor azt a G gráfot **egyszerű gráf**Hiba! A könyvjelző nem létezik.nak nevezzük. A Kedves Olvasó találkozhat olyan könyvekkel is amelyben azon G gráfokat, melyekben párhuzamos élek is találhatók multi gráfoknak nevezik. Ha valamely gráfnak egyetlen éle sincs szokás azt **üres gráf**Hiba! A könyvjelző nem létezik.nak mondani.

Definíció: A G gráf **v csúcs**ának fokán a v-re illeszkedô élek számát értjük. Jele: $\delta(v)$.

I.2.Tétel(kézfogási tétel Hiba! A könyvjelző nem létezik. **):** *Ha a* $G(E,\varphi,V)$ *gráf véges, akkor* $\sum_{v\in V}\delta(v)=2|E|$.

Tekintsünk egy társaságot, ahol az emberek nem csak szóba állnak egymással, de olykor-olykor még kezet is fognak, sôt azt sem zárjuk ki, hogy egyesek többször is kezet fogtak vagy valaki önmagával fogott kezet. Ha most az embereket tekintjük a gráfunk csúcspontjainak és egy-egy kézfogást egy élnek, akkor a tétel pontosan azt állítja, hogy a kézfogások száma bármely társaságban páros. Félreértések elkerülése végett, ha X kezet fogott Y-al , akkor Y is kezet fogott X-el,(más szóval a kézfogások egyenrangúak). A tétel szigorú bizonyítása az I.1. tétel bizonyításához hasonlóan történhet. Ha valamely csúcs pont foka 0, akkor azt a pontot **izolált pont**Hiba! A könyvjelző nem létezik.nak nevezzük

Következmény: A G gráf páratlan fokú csúcsainak a száma páros.

Valóban a $\sum_{v\in V}\delta(v)$ összeget fel lehet bontani két részre külön gyűjtve a páros és a páratlan fokú csúcsokat azaz $\sum_{v\in V}\delta(v)=\sum_{v\in V,\delta(v)\equiv 0\bmod(2)}\delta(v)+\sum_{v\in V,\delta(v)\equiv 1\bmod(2)}\delta(v)=2|E|$ (2)

(2)-bôl látható, hogy a $\sum_{v\in V,\delta(v)\equiv 1\bmod(2)}\delta(v)$ szám páros

, s mivel páratlan sok páratlan szám összege páratlan, ezért a $\sum_{v\in V,\delta(v)\equiv 1\bmod(2)}\delta(v)$ tagjainak a száma csak páros lehet.

Utak, körök, fák

" *Hozzon a föld sarjat, magtermô füvet, gyümölcsfát,...*"
Genezis-Brésith, I.11.

Definíció: A $G=(E,\varphi,V)$ gráf $e_1,e_2,\ldots,e_k$ élsorozatot **séta**Hiba! A könyvjelző nem létezik.**nak** (él sorozatnak)mondjuk , ha

$$\varphi(e_1)=(v_0,v_1),\varphi(e_2)=(v_1,v_2),\ldots,\varphi(e_k)=(v_{k-1},v_k).$$

Itt megengedett, hogy akár az élek akár a csúcsok között egyformák is legyenek.

Definició: A $G=(E,\varphi,V)$ gráf $e_1,e_2,\ldots,e_k$ élsorozatot **törött vonal**Hiba! A könyvjelző nem létezik.**nak** (vagy egyszerűen csak **vonal**nak) mondjuk, ha

$$\varphi(e_1)=(v_0,v_1),\varphi(e_2)=(v_1,v_2),\ldots,\varphi(e_k)=(v_{k-1},v_k).$$

A törött vonalnál illetve a vonalnál a csúcspontok között lehetnek egyenlôk, de az élek között nem.

Definició: Az $e_1,e_2,\ldots,e_k$ törött vonalat **út**Hiba! A könyvjelző nem létezik.nak mondjuk, ha a $v_0,v_1,v_2,\ldots,v_{k-1},v_k$ csúcsok páronként különbözôek.

A fenti definiciót úgy is megfogalmazhatjuk kicsit szemléletesebben , hogy a G gráf v_0 csúcsából út megy v_k-ba, vagy az út olyan nyílt törött vonal, mely seholsem metszi önmagát.

Definíció: Az $e_1,e_2,\ldots,e_k$ törött vonalat **kör**Hiba! A könyvjelző nem létezik.nek **(ciklus**nak**)** mondjuk, ha a $v_1,v_2,\ldots,v_{k-1},v_k$ csúcsok páronként különbözôek, de $v_0=v_k$.

Definíció: A $G=(E,\varphi,V)$ gráfot **összefüggô**Hiba! A könyvjelző nem létezik.nek mondjuk, ha bármely csúcsából visz bármely másik csúcsába út.

Definíció: A G gráfnak a G' részgráfját **komponens**Hiba! A könyvjelző nem létezik.nek nevezzük, ha rendelkezik a következô tulajdonságokkal

(i) G' összefüggô,

(ii) nem létezik G-nek olyan G" összefüggô részgráfja, mely G'-t valódi módon tartalmazza.

Röviden fogalmazhatunk volna úgy is, hogy G **összefüggô maximális részgráf**Hiba! A könyvjelző nem létezik.jait G komponenseinek nevezzük.

Definíció: A G egyszerű gráfot **fának** mondjuk, ha összefüggô és nem tartalmaz kört.

I.3.Tétel: *Bármely G fa**Hiba! A könyvjelző nem létezik.** tartalmaz legalább egy elsôfokú csúcsot.*

Bizonyítás: Indirekt bizonyítunk. Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz az nyilván, annyit jelent, hogy G bármely csúcsának a foka 2-nél nagyobb vagy egyenlô-,0 nem lehet az összefüggôség miatt. Induljunk el G valamely v_0 csúcsából. v_0-ból vezessen e_1 él v_1-be ,v_1-bôl e_2 él v_2-be és így tovább v_{k-1}-bôl e_k v_k-ba . Elôbb vagy utóbb vissza érkezünk egy olyan v_j csúcsba (s itt a kör), ahol már korábban jártunk, mivel G -nek véges sok csúcsa van és indirekt feltevésünk szerint mindegyik csúcsának a foka legalább kettô volt. Azaz ha beérkeztünk valamely csúcsba egy e éllel, akkor egy másik e' éllel onnan tova is tudtunk ballókázni. S végül láttuk, hogy az e_j, e_{j+1},...,e_k töröttvonal egy köre a G gráfnak ellentétben azzal, hogy G fa volt, s az ellentmondás oka nyilván az indirekt feltevésünk vala.

Definíció: A G gráfot **erdô**Hiba! A könyvjelző nem létezik.nek mondjuk, ha komponensei fák.

I.4.Tétel: <u>Ha G gráf fa, akkor</u> $|V|-1=|E|$.

Bizonyítás: A G fa éleinek száma szerinti teljes indukcióval bizonyítunk. Ha a G-nek egy éle van, akkor az állítás igaz. Tételezzük fel, hogy bármely, olyan fára igaz az állítás, melynek legfeljebb n éle van . Legyen most a $G=(E,\varphi,V)$ fagráfnak n+1 éle azaz $|E|=n+1$. G egy élét törölve $G_1=(E_1,\varphi_1,V_1)$ és $G_2=(E_2,\varphi_2,V_2)$ komponensekre esik szét és nyilván mindkettô fa, melyre már az indukciós feltevés miatt igaz az állítás. Tehát érvényes $|V_1|-1=|E_1|$, $|V_2|-1=|E_2|$ e két utóbbi egyenletet összeadva $|V_1|+|V_2|-2=|E_1|+|E_2|$ adódik. Figyelembe véve, hogy $|V_1|+|V_2|=|V|$, továbbá $|E_1|+|E_2|+1=|E|$. Látható hogy az n+1 élű gráfra is teljesül az állítás.

I.5.Tétel: <u>Ha a $G=(E,\varphi,V)$ gráf erdô és k komponensbôl áll, akkor $|V|-k=|E|$.</u>

Bizonyítás: A feltétel szerint a $G=(E,\varphi,V)$ gráf a $G_1=(E_1,\varphi_1,V_1),G_2=(E_2,\varphi_2,V_2),\ldots,G_k=(E_k,\varphi_k,V_k)$ komponensekbôl áll, melyekre rendre teljesül, hogy $|V_1|-1=|E_1|,|V_2|-1=|E_2|,\ldots,|V_k|-1=|E_k|$. E k darab egyenlet megfelelô oldalait összeadva adódik a tétel állítása.

Az I.3. tételben megfogalmaztuk, hogy egy $G=(E,\varphi,V)$ fagráfnak legalább egy elsôfokú (pl. $v_1\in V,\delta(v_1)=1$)csúcsa van. E tételt most könnyen pontosíthatjuk, olyan formán hogy egy fagráfnak legalább két elsôfokú pontja van. Valóban, az I.2. tétel szerint a gráf fokainak összege páros, azaz az elôbb említett elsôfokú csúcson kívül tartalmaz még legalább egy ($v_2\in V,\delta(v_2)=1\bmod(2)$)vagy több páratlan fokú csúcsot. Az összefüggôség miatt $2\le\delta(v_3),2\le\delta(v_4),\ldots,2\le\delta(v_{|V|})$, továbbá $\delta(v_1)=1,\ 3\le\delta(v_2)$. Az elôbbi egyenlôségekkel alulról becsülve G pontjai fokainak összegét $\sum_{v\in V}\delta(v)\ge 2|V|$ adódik, ami ellentmond az I.4. tételnek.

Tétel: <u>Bármely fagráfnak legalább 2 elsôfokú pontja van.</u>

Vegyük észre, hogy ez utóbbi állítás nem javítható, vagyis van olyan fa, amelynek pontosan 2 elsôfokú pontja van. Szemléltethetünk egy olyan gráfot, melynek csupán két elsôfokú pontja van egy fonallal, melynek két végére csomót kötöttünk, s közbülsô helyeken kötöttünk a fonálra $|V|-2$ csomót. A csomókat a gráf csúcsainak és két szomszédos csomót közvetlenül összekötô (csomó mentes) fonal darabot élnek tekintünk. A másik "szélsôséges" fát szemléltessük egy tarajossüllel. A fa éleinek a tarajossül tüskéit tekintsük, csúcspontoknak pedig egyrészt a tarajossült, illetve a tüskék szabadon maradt végét. A fának, ekkor van egy pontja, melynek a foka k-1, s az összes többi csúcs foka 1. Ez utóbbi gráfokat szokás **<u>csillag-gráf</u>**<u>Hiba! A könyvjelző nem létezik.</u>nak is nevezni.

Definíció: A $G=(E,\varphi,V)$ gráf a $G_1=(E_1,\varphi_1,V_1)$ gráffal **izomorf**Hiba! A könyvjelző nem létezik., ha teljesednek a következô feltételek:

(i) létezik kölcsönösen egyértelmű α leképezése E-nek E_1-re

(ii)létezik kölcsönösen egyértelmű β leképezése V-nek V_1-re

(iii) $\left(\forall e\in E,\ \ ha\ \ \varphi(e)=(v_i,v_j)\right)\Rightarrow\left(\varphi_1(\alpha(e))=(\beta(v_1),\beta(v_2))\right)$.

Gráfok izomorfiája különbözik a topológia homeomorfia fogalmától. Tekintsünk például azt a G_1 gráfot , amely két pontból, s az azokra illeszkedô hurokélbôl áll. Realizálja G_1-t két összekapcsolt kulcstartó karika, ha szét kapcsoljuk a két karikát, akkor a kapott G_1' gráf izomorf G_1-el,de topológiai értelemben G_1 nem ekvivalens G_1'-el.

Definíció: A $G=(E,\varphi,V)$ gráf **feszítôfájának**Hiba! A könyvjelző nem létezik. mondjuk a G'-t, ha G'részgráfja G-nek és G' fa másrészt G minden csúcsa G'-ne is csúcsa.

Tétel: A G gráfnak akkor és csak akkor van feszítôfája, ha G összefüggô.

Bizonyítás: Legyen G összefüggô, mutassuk meg, hogy ekkor létezik feszítôfája. Ha G nem tartalmaz kört, akkor G az összefüggôség miatt fa és önmagának feszítôfája. Ha G tartalmaz kört, akkor a kör valamely e élét törölve G-bôl G'gráfot kapunk, amely továbbra is összefüggô marad. Ha G'-ne van köre , akkor ismét elhagyunk egy e'élt a G' gráfból. Véges sok lépésen belül eljutunk egy olyan gráfhoz, mely még összefüggô, de már nincs köre, ez a $G^{(k)}$ gráf jó G feszítôfájának.

Az állítás megfordítása triviális mivel a fagráf összefüggô. S az is elég magától értetôdô, hogy ha a G gráfnak van összefüggô részgráfja, akkor G is összefüggô.

Sok esetben bizonyul hasznosnak az irányított fa fogalma. A G irányított gráfban az $e_1,e_2,\ldots,e_k$ él sorozat **irányított út**Hiba! A könyvjelző nem létezik., ha $\varphi(e_1)=(v_0,v_1),\varphi(e_2)=(v_1,v_2),\ldots,\varphi(e_k)=(v_{k-1},v_k)$ és $v_i\ne v_j, ha\ \ i\ne j$. A G gráfnak valamely v csúcsa **gyökere**Hiba! A könyvjelző nem létezik., ha G bármely v-tôl különbözô csúcsába el lehet jutni irányított úttal. A G gráf **irányított fa**Hiba! A könyvjelző nem létezik. ha irányítás nélkül tekintve fa, és van egy v gyökere, melybôl bármely csúcsába vezet irányított út.

Teljes gráf, komplementer gráf

Definíció: A $G=(E,\varphi,V)$ gráfot n szögpontú **teljes gráf**Hiba! A könyvjelző nem létezik.nak nevezzük, ha bármely két különbözô csúcsát él köti össze bármely másik csúccsal és $|V|=n$. Jele K^n.

Tétel: <u>A K^n n pontú teljes gráf éleinek a száma $\frac{n(n-1)}{2}$.</u>

Bizonyítás: A K^n definíciója szerint bármely szögpont foka n-1. A gráfunknak összesen n csúcspontja van , ezért a gráf csúcspontjai fokainak az összege pontosan n(n-1). Az I.2. tétel szerint, ekkor a gráf éleinek a száma pontosan $\frac{n(n-1)}{2}$.

Legyen adott a $G=(E,\varphi,V)$ és $|V|=n$ egyszerű gráf, s legyen K^n -nek a $G'=(E',\varphi',V)$ olyan részgráfja, mely $G=(E,\varphi,V)$-vel izomorf. Töröljük K^n-nek $G'=(E',\varphi',V)$-höz tartozó éleit. A kapott gráf lesz G komplementere. Más megfogalmazásban $G'=(E',\varphi',V)$ komplementere a $G=(E,\varphi,V)$ gráfnak, ha $G'=(E',\varphi',V)$ élei teljes gráffá egészítik ki G-t. Nyilván a teljes gráf komplementere az üres gráf, és fordítva az üres gráf komplementere a teljes gráf. Az n szögpontú teljes gráfot lehet úgy tekinteni mint az n csúcspontú n-1 dimenziós szimplex gráfját.

Feladatok:

1. Rajzoljon olyan 5 csúcspontú gráfokat, melyeknek 2 harmadfokú és 3 negyedfokú pontja van. Hány éle van a rajzolt gráfoknak?

2. Hány olyan 5 csúcspontú gráf van, ahol a csúcsok fokai rendre, 1,2,2,3,3.

3. Egy társaság tagjai kézfogással üdvözlik egymást. Bizonyítsa be, hogy páros azon emberek száma akik páratlan sokszor fogtak kezet.

4. Bizonyítsa be, hogy ha a $G(E,\varphi,V)$ egyszerű gráfnak 2 vagy kettônél több csúcsa van $(|V|\geq 2)$, akkor van két azonos fokszámú csúcsa.

5. Egy sakk versenyen bármely játékos játszik bármely másik játékossal, bizonyítsa be, hogy a verseny bármely szakaszában van két olyan versenyzô akik addig azonos számú mérkôzést játszottak.

6. Hány olyan 5 pontú (nem izomorf) egyszerű gráf van, melyre teljesedik, hogy bármely pontjának a foka legalább 3.

7. Bizonyítsa be, hogyha a G összefüggô gráf csúcsainak a száma $n\geq 2$ és éleinek a száma n-nél kevesebb, akkor van elsô fokú csúcsa is.

8. Bizonyítsa be, hogy ha n számú telefonközpont közül bármely kettô között létesíthetô összeköttetés, akkor van legalább n-1 számú közvetlen összeköttetés is.

9. Ha egy 2n pontú gráf minden pontjának a foka legalább n , akkor a gráf összefüggô.

10. Bizonyítsa be, ha a G gráf minden pontjának a foka legalább kettô, akkor van köre.

11. Egy sakk csapat bajnokságra n csapat nevezett be, s eddig n+2 mérkôzést játszottak le. Mutassa meg, hogy van közöttük legalább egy csapat, mely legalább 3 mérkôzést már lejátszott.

12. Bizonyítsa be, hogy a G összefüggô gráf valamely élét törölve újból összefüggô gráfot kapunk.

13. Bizonyítsa be, hogy az n pontú, n élű egyszerű gráfnak van legalább egy köre.

14. Bizonyítsa be, hogy a $G(E,\varphi,V)$ összefüggô egyszerű gráf akkor és csak akkor marad összefüggô egy $e\in E$ élének törlése után, ha van G-nek olyan k köre, mely tartalmazza e-t.

15. Bizonyítsa be, hogy az összefüggô egyszerű véges gráf éleinek a halmaza akkor és csak akkor alkot kört, ha G valamennyi foka 2.

14. Melyik az a legnagyobb p egész szám, amelyre a q csúcsú teljes gráf p szeresen összefüggô.

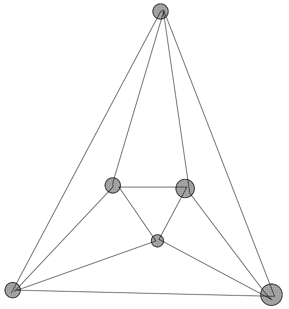
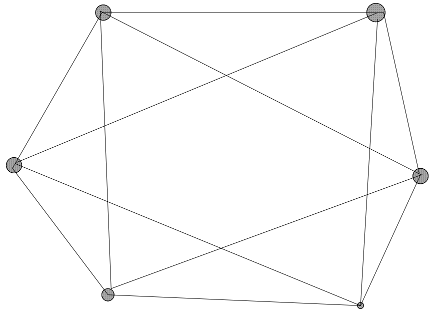
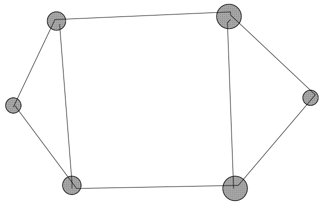
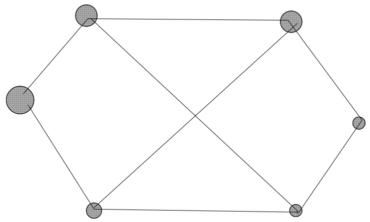
15. Mutassa meg, hogy ha egy teljes egyszerű gráf éleihez bárhogyan is irányítást írunk elô, akkor az eredményül kapott irányított gráfnak szükségszerűen létezik irányított feszítô fája.

16. Legyen $\delta_0(G(E,\varphi,V))=\min\limits_{v\in V}(\delta(v))\geq\frac{|V|-1}{2}$,s G egyszerű gráf. Bizonyítsa hogy G összefüggô! Igaz lesz e az elôbbi állítás, ha csak a $\delta_0(G(E,\varphi,V))=\min\limits_{v\in V}(\delta(v))\geq\left[\frac{|V|-1}{2}\right]$ teljesül, ahol a [x] függvény az x egészrészét jelöli.

17. Mutassa meg, hogy egy n csúcsú és k összefüggô komponensbôl álló gráfban az élek száma legfeljebb $\frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$ lehet.

18.Bizonyítsa be, hogy egy összefüggô egyszerű gráfban bármely két maximális hosszúságú útnak van legalább egy közös csúcsa.

19. A következô G_1, G_2 gráfok közül melyek izomorfak, melyek nem?

Permutációk, variációk, kombinációk ismétléssel és ismétlés nélkül

Definíció: Az n különbözô elem egy **permutáció**Hiba! A könyvjelző nem létezik.ján, n elem egy rögzített sorrendjét értjük.

Például n=6 esetén legyen 1,2,3,4,5,6 a szóban forgó elemek, s az adott sorrendjük 3,2,4,1,5,6. A permutációt lehet úgy is definiálni, mint egy n elemű halmaz önmagára való kölcsönösen egyértelmű leképezését. Az elôbbi permutációt ekkor meg lehet adni az $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ alakban, ez az alak a függvények táblázattal való megadásának egy tömör jelölése, $\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$. A felsô sorban független változó értékei az alsó sorban a függô változó megfelelô értékei szerepelnek. n faktoriálisnak mondjuk az egymásután következô 1,2,...,n számok szorzatát, jele n!=1·2·...(n-1)·n és 0!=1, megállapodás szerint.

Tétel: *Az n elemű H halmaz összes különbözô permutációinak a száma P_n=n!.*

Bizonyítás: A H halmaz elemeinek a száma szerinti teljes indukcióval bizonyítunk. n=1 esetén az állítás igaz, mert egy elemet, csak egyféleképpen lehet sorba állítani. Tételezzük fel, hogy az állítás igaz n-re, s mutassuk meg, e feltevésbôl következik , hogy igaz (n+1)-re is. Legyen megadva a H halmaz elemeinek egy rögzített sorrendje pl. $(h_1, h_2, \ldots, h_n)$. Bármelyik permutációnál a ? jellel jelölt helyek $(?h_1, ?h_2, \ldots, ?h_n?)$ valamelyikére beszúrhatjuk a h_{n+1}-t. Látható, hogy az n elem bármely permutációjából (n+1) darab különbözô (n+1) elemű permutációt lehet legyártani, tehát bármely n-re teljesül az $P_{n+1} = P_n(n+1)$, s mivel n!(n+1)=(n+1)!, ezért a bizonyítással kész vagyunk.

Definíció: Legyen adott n elem, melyek közül $l_1, l_2, \ldots, l_k$ rendre egyforma (és $l_1 + l_2 + \ldots + l_k = n$) ezen elemek egy rögzített sorrendjét egy **ismétléses permutáció**Hiba! A könyvjelző nem létezik.nak nevezzük.

Például, ha egy osztály tanulóit a dolgozatukra kapott jegyek alapján sorrendbe állítjuk, akkor az egyforma jegyet kapott tanulók között már nem teszünk különbséget.

Tétel: *Ha az n elem közül $l_1, l_2, \ldots, l_k$ rendre egyforma és $l_1 + l_2 + \ldots + l_k = n$, akkor ismétléses permutációinak a száma*

$$P_{n, l_1, l_2, \ldots, l_k} = \frac{n!}{l_1! l_2! \ldots l_k!}.$$

Bizonyítás: Legyen megadva a $(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ elemeknek valamely ismétléses permutációja. A permutációban lévô egyforma elemeket különböztessük meg indexekkel és permutáljuk az eddig azonosnak tekintett elemeket is. {Például egy 5 fôs osztályban 3 ötöst és 2 négyest adtunk és a dolgozatokat (5,4,4,5,5) sorba osztottuk ki, indexelve az eddig egyformának tekintett jegyeket $(5_1, 4_1, 4_2, 5_2, 5_3)$. E permutációból 3!2! ismétlés nélküli permutáció adódik.} Egyetlen egy ismétléses permutációból $l_1! l_2! \ldots l_k!$ számú ismétlés nélküli permutációt kapunk, ezért $P_{n, l_1, l_2, \ldots, l_k}\, l_1! l_2! \ldots l_k!$=n!, s innen már valóban $l_1! l_2! \ldots l_k!$ -vel való osztás után adódik a tétel állítása.

Definíció: n különbözô elem közül kiválasztott rendezett k elemet, **ismétlés nélküli k-ad osztályú variáció**Hiba! A könyvjelző nem létezik.nak nevezzük.

Például, ha egy futó versenyen húszan indultak és az elsô 3 befutót díjazták, akkor a díjazottakat tekinthetjük 20 elem harmad osztályú variációjának.

Tétel: *n elem ismétlés nélküli k-ad osztályú variációinak a száma* V_k^n*=n(n-1)...(n-(k-1)).*

Bizonyítás: Rögzített n mellett k szerinti teljes indukcióval bizonyítunk. k=1-re az állítás igaz, mivel n elembôl 1-t pontosan n féleképpen lehet kiválasztani. Tételezzük fel, hogy k-ra teljesedik és igazoljuk (k+1)-re. Bármelyik $(h_1, h_2, \dots, h_k)$ k-ad osztályú variációhoz (n-k) elem közül választhatunk egy h_{k+1}.-t, hogy egy $(h_1, h_2, \dots, h_k, h_{k+1})$ (k+1)-ed osztályú variációt kapjunk. Azaz igaz a következô összefüggés $V_k^n(n-k) = V_{k+1}^n$, miáltal tételünk bizonyítást nyert.

Definíció: n különbözô elembôl, ha k elemet oly módon választunk ki, hogy egy elemet többször is választhatunk, akkor **n elem k-ad osztályú ismétléses kombináció**Hiba! A könyvjelző nem létezik.iról beszélünk.

Például, ha valaki kitölt egy tizennégy mérkôzéses totó szelvényt, akkor az x,1,2 elemeknek megadta egy 14-ed osztályú variációját.

Tétel: *n különbözô elem összes k-ad osztályú ismétléses variációinak a száma* $V_{k,ism}^n = n^k$.

Bizonyítás: Jelölje 0,1,2,...,n-2,n-1, az n különbözô elemet, ezen elemek közül k-t egymásután leírva egy legfeljebb k jegyű számot kapunk az n alapú számrendszerben, melyeknek a száma nyilván n^k, s ezzel a bizonyítás kész. Tekinthetjük az n különbözô elem egy k-ad osztályú ismétlésese variációját úgy is mint az n elem H halmazának önmagával vett k-szoros direkt szorzatának egy elemét, s akkor is elég nyilvánvaló, hogy $|H \otimes H \otimes \dots \otimes H| = |H|^k$. Itt $|H|$ jelöli a H halmaz elemeinek a számát.

Definíció: n különbözô elem közül ki választva k elemet, melyeknél a rendezésre nem vagyunk tekintettel az **n elem egy k-ad osztályú kombináció**Hiba! A könyvjelző nem létezik.ját kapjuk.

Például, ha valaki az ötös lottón helyesen kitölt egy szelvényt, akkor a 90 elemnek megadta egy 5-öd osztályú kombinációját. Állapodjunk meg abban, hogy $\binom{n}{k}$ fogja jelölni a $\frac{n!}{(n-k)!\,k!}$ számot $\binom{n}{k}$ szokás binomiális együtthatónak is nevezni.

Tétel: *n elem k-ad osztályú kombinációinak a száma* $C_k^n = \binom{n}{k}$.

Bizonyítás: n elem valamely ismétlés nélküli k-ad osztályú kombinációjából k! számú k-ad osztályú ismétlés nélküli variáció nyerhetô, ha az elemeket egymás között permutáljuk. Tehát fennáll a következô $C_k^n k! = V_k^n$. Figyelembe véve, hogy $V_k^n = n(n-1)\dots(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$, kapjuk a tétel állítását.

Definíció: Ha az n elem közül oly módon választunk ki k darabot, hogy egy elem többször is szerepelhet és a sorrendre nem vagyunk tekintettel, akkor az n elem egy **ismétléses k-ad osztályú kombináció**járól beszélünk.

Tétel: *n elem k-ad osztályú ismétléses permutációinak a száma* $C_{k,ism.}^n = \binom{n+k-1}{k}$.

Bizonyítás: A bizonyítás alapötlete röviden csupán annyi, hogy megadunk egy kölcsönösen egyértelmű leképezést (n+k-1) különbözô elem k-ad osztályú ismétlés nélküli kombinációi és n különbözô elem k-ad osztályú ismétléses kombinációi között. Legyen az n különbözô elem 1,2,...,n egy és az (n+k-1) különbözô elem 1,2,...,n,n+1,...,n+k-1 . Az n különbözô elem egy ismétléses k-adosztályú kombinációja nagyság szerint sorba rendezve legyen $0 \le \alpha_1 \le \alpha_2 \le \dots \le \alpha_k \le n$. Az $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ ismétléses kombinációnak feleltessük meg az $(\alpha_1, \alpha_2+1, \alpha_3+2, \dots, \alpha_k+k-1)$ elemek ismétlés nélküli k-adosztályú kombinációját. Látható, hogy $0 \le \alpha_1 < \alpha_2+1 < \dots < \alpha_k+k-1 \le n+k-1$, ezért az $(\alpha_1, \alpha_2+1, \alpha_3+2, \dots, \alpha_k+k-1)$ elemek valóban az n+k-1 különbözô elem ismétlés nélküli kombinációja, s az összeadás egyértelműsége miatt a leképezés kölcsönösen egyértelmű volta is garantált.

Binomiális és polinomiális tétel

Tétel (polinomiális Hiba! A könyvjelző nem létezik. **):** *Legyen* $\forall a_1, a_2, \dots, a_k \in R$, *ahol R kommutatív gyűrű és n egynél nagyobb természetes szám, ekkor*

$$(a_1 + a_2 + \dots a_k)^n = \sum_{s_1+s_2+\dots+s_k=n} \frac{n!}{s_1!\,s_2!\dots s_k!} a_1^{s_1} a_2^{s_2} \dots a_k^{s_k}.$$

Bizonyítás: Tudjuk, hogy bármely kommutatív gyűrűben a több tag szorzását több taggal oly módon végezhetjük el, hogy minden tagot szorzunk minden taggal. Ha felírjuk az n tényezôs

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_k)(a_1 + a_2 + \dots + a_k)\dots(a_1 + a_2 + \dots + a_k),$$

akkor az a_1 *elemet* $s_1 - szer$ *az* n *zárójelbôl* $\binom{n}{s_1}$,

a_2 *elemet* $s_2 - szer$ *az* $n - s_1$ *zárójelbôl* $\binom{n-s_1}{s_2}$,...,

a_k *elemet* $s_k - szor$ *az* $n - s_1 - s_2 - \dots - s_{k-1}$ *zárójelbôl* $\binom{n-s_1-s_2-\dots-s_{k-1}}{s_k}$

féleképpen lehet kiválasztani. Az

$$\binom{n}{s_1}\binom{n-s_1}{s_2}\dots\binom{n-s_1-s_2-\dots-s_{k-1}}{s_k} =$$

$$\frac{n!}{(n-s_1)!\,s_1!}\frac{(n-s_1)!}{(n-s_1-s_2)!\,s_2!}\dots\frac{(n-s_1-s_2-\dots-s_{k-1})!}{(n-s_1-s_2-\dots-s_k)!\,s_k!} = \frac{n!}{s_1!\,s_2!\dots s_k!}.$$

S ez utóbbi egyenlôség jobboldalán a tételben szereplô $a_1^{s_1} a_2^{s_2} \dots a_k^{s_k}$ tag együtthatója áll, amivel állításunkat bizonyítottuk is.

Tétel(binomiális tétel Hiba! A könyvjelző nem létezik.**):** *Legyen* $\forall a_1, a_2, \in R$*, ahol R kommutatív gyűrű és n egynél nagyobb természetes szám, ekkor*

$$(a_1+a_2)^n=\sum_{s_1=0}^{s_1=n}\binom{n}{s_1}a_1^{s_1}a_2^{n-s_1}.$$

Bizonyítás: A tétel a polinomiális tétel speciális esete. Következmény:

$$(1+1)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n\ (*)$$

$$(1-1)^n=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}+(-1)^n\binom{n}{n}=0\ (**)$$

Szita-formula

A szita formula az eratoszthenészi szita leszármazottja, abban az értelemben, hogy az eratoszthenészi szita módszert adott, azon k számok meghatározására, melyek prímszámok egy elôre megadott véges halmazának egyik elemével sem oszthatók. A szita**Hiba! A könyvjelző nem létezik.** formula képletet ad a H halmaz azon elemeinek a számára, melyek nem elemei H elôre adott $H_1, H_2, \ldots, H_n$ részhalmazai egyikének sem.

Tétel(szita-formula): *Legyen adott a H véges halmaz és* $H_1, H_2, \ldots, H_n$ *részhalmazai, ekkor*

$$\left|\overline{H_1\cup H_2\cup\ldots\cup H_n}\right|=|H|-|H_1|-|H_2|-\ldots-|H_n|+|H_1\cap H_2|+|H_1\cap H_3|+\ldots+|H_1\cap H_n|+$$
$$+|H_2\cap H_3|+\ldots+|H_{n-1}\cap H_n|-|H_1\cap H_2\cap H_3|-\ldots-|H_{n-2}\cap H_{n-1}\cap H_n|+\ldots+$$
$$(-1)^n|H_1\cap H_2\cap H_3\cap\ldots\cap H_n|=|H|+\sum_{s=1}^{n}(-1)^s\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_s\le n}\left|H_{i_1}\cap H_{i_2}\cap\ldots H_{i_s}\right|.$$

Bizonyítás: Ismert, hogy $\left|\overline{H_1\cup H_2\cup\ldots\cup H_n}\right|=|H|-|H_1\cup H_2\cup\ldots\cup H_n|$ ezért a bizonyítandó egyenlôség ekvivalens az alábbival:

$$|H_1\cup H_2\cup H_3\cup\ldots\cup H_n|=\sum_{s=1}^{n}(-1)^{s-1}\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_s\le n}\left|H_{i_1}\cap H_{i_2}\cap\ldots\cap H_{i_s}\right|\ (*)$$

Ez utóbbi formula bizonyítását n szerinti teljes indukcióval végezzük. n=1-re az állítás nyilvánvalóan igaz. n=2 esetén $|H_1\cup H_2|=(-1)^0|H_1|+(-1)^0|H_2|+(-1)^1|H_1\cap H_2|$ teljesül, mert a metszet elemeit duplán számoltuk. Tételezzük fel, hogy a formula igaz, ha (n-1)≥2. Igazoljuk az állítást n-re. A $\left|[H_1\cup H_2\cup H_3\cup\ldots\cup H_{n-1}]\cup H_n\right|=|H_1\cup H_2\cup H_3\cup\ldots\cup H_{n-1}|+|H_n|-\left|(H_1\cup H_2\cup H_3\cup\ldots\cup H_{n-1})\cap H_n\right|$ formula az n=2 speciális eset alkalmazásával kapható meg. Jobb oldalának utolsó tagjára alkalmazva a disztributivitást adódik az alábbi céljainknak jobban megfelelô formula: $|H_1\cup\ldots\cup H_n|=|H_1\cup H_2\cup H_3\cup\ldots\cup H_{n-1}|+|H_n|-\left|(H_1\cap H_n)\cup(H_2\cap H_n)\cup\ldots\cup(H_{n-1}\cap H_n)\right|$ (i)

Az (i) jobb oldalán szereplô elsô tagra alkalmazva az indukciós feltevést írhatjuk, hogy

$$|H_1\cup H_2\cup H_3\cup\ldots\cup H_{n-1}|=\sum_{s=1}^{n}(-1)^{s-1}\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_s\le n-1}\left|H_{i_1}\cap H_{i_2}\cap\ldots\cap H_{i_s}\right|\quad \text{(ii)}$$

a harmadik tagra pedig a következôt

$$\left|(H_1\cap H_n)\cup\ldots\cup(H_{n-1}\cap H_n)\right|=\sum_{s=1}^{n}(-1)^{s-1}\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_s\le n-1}\left|H_{i_1}\cap H_{i_2}\cap\ldots\cap H_{i_s}\cap H_n\right|$$

ill.

$$\left|(H_1\cap H_n)\cup\ldots\cup(H_{n-1}\cap H_n)\right|=\sum_{s=2}^{n}(-1)^{s-1}\sum_{1\le i_1\le i_2\le\ldots\le i_s=n}\left|H_{i_1}\cap H_{i_2}\cap\ldots\cap H_{i_s}\right|\quad \text{(iii)}$$

Az (i) formulába vissza írva (ii) és (iii)-t , pontosan a bizonyítandó (∗) formulát kapjuk, s ezzel a bizonyítás kész.

Következmény(I): *Ha bármely s-re és tetszôleges* $(i_1, i_2, \ldots, i_s)$ *ill.* $(i'_1, i'_2, \ldots, i'_s)$ esetén $\left|H_{i_1}\cap H_{i_2}\cap\ldots\cap H_{i_s}\right|=\left|H_{i'_1}\cap H_{i'_2}\cap\ldots\cap H_{i'_s}\right|$, *akkor*

$$\left|\overline{H_1\cup H_2\cup\ldots\cup H_n}\right|=|H|+\sum_{s=1}^{n}(-1)^s\binom{n}{s}|H_1\cap H_2\cap\ldots\cap H_n|\ .$$

Következmény(II): *Legyen* A_1 **k**, A_2 **n** e*lemű halmaz , ekkor a* A_1*-t* A_2*-be képezô szürjektív leképezések (függvények) száma* $n^k+\sum_{s=1}^{n}(-1)^s\binom{n}{s}(n-s)^k$.

Bizonyítás: Az (I) következményt alkalmazzuk arra az esetre, ha H_i jelöli azokat az A_1-t A_2-re képezô függvényeket, melyeknél az A_2 a_i eleme nem lép fel képként.

Megjegyzés: A szita formulának a számelméletben vannak kifejezetten finom és rendkivül mély alkalmazásai. Kombinatorikában a szita szép általánosítása köszönhetô G. C. Rota-nak.

Permutációk, szimmetrikus csoport

Függvények körében ismert az összetett függvény képzés művelete, ennek megfelelôen értelmezhetünk a permutációk között is egy műveletet, a permutációk szorzását, mint a megfelelô leképezések egymásután végrehajtását. Példa:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&3&4&1&2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&1&4&3&6&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&6&1&4&5&2\end{pmatrix}$$

Itt "jobbról-balra" szoroztunk annak megfelelôen, hogy ha az f(g) összetett függvény azt jelenti, hogy elôször végrehajtjuk g-t, majd f-t. Persze az elôbbi szorzást elvégezhetjük

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&3&4&1&2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&1&4&3&6&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\5&4&3&2&1&6\end{pmatrix}$$

"balról-jobbra" is az eredmény persze általában más lesz(kivéve, ha a két elem felcserélhetô) , algebrai szempontból azonban ugyanaz az algebrai struktúra adódik mindkét esetben, célszerű adott témakörön belül azonban csak az egyik írásmódot használni. Mi az utóbbi a "balról-jobbra" írásmód hívei vagyunk.

Tétel: _Az n elemű H halmaz permutációi a permutációk szorzására nézve csoportot alkotnak. Jele: S_n (a S a szimmetriára utal a csoport szokásos neve a szimmetrikus csoport._

Bizonyítás: Igazoljuk sorban, hogy teljesednek a **csoport axiómák.**

(i) A permutációk szorzása **két változós algebrai művelet**, mert a H önmagára való kölcsönösen egyértelmű leképezéseinek egymásutánja is, H önmagára való kölcsönösen egyértelmű leképezése.

(ii) Az **asszociatívitás is teljesül** ,mivel leképezések szorzása mindig asszociatív.

(iii) **Létezik egységelem** ti. az identikus leképezés.

(iv) **Minden elemnek van inverze** is, mivel a kölcsönösen egyértelmű leképezések invertálhatók .

Definíció: Azt a permutációt, melyben két elem cserélt csupán helyet **transzpozició**Hiba! A könyvjelző nem létezik.nak nevezzük. Például: Az $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i\dots & j\dots & n \\ 1 & 2 & \dots & j\dots & i\dots & n \end{pmatrix}$ permutáció az i, j elemeknek egy transzpoziciója.

Bármely transzpoziciót felírhatunk szomszédos transzpoziciók szorzataként. Az identikus permutációból $\begin{pmatrix} 1,2,\dots,i,\dots,j,\dots,n \\ 1,2,\dots,i,\dots,j,\dots,n \end{pmatrix}$-bôl $(i-j)$ darab szomszédos elemnek a transzpoziciójával (cseréjével) kapjuk a $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j-1 & j\dots & n \\ 1 & 2 & \dots & i+1 & \dots & j & i\dots & n \end{pmatrix}$ permutációt, s ez utóbbi permutációból $(i-j-1)$ szomszédos elem cserével adódik a $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i\dots & j\dots & n \\ 1 & 2 & \dots & j\dots & i\dots & n \end{pmatrix}$ permutáció, azaz az identikus permutációból $(2(i-j)-1)$ szomszédos elemnek a cseréjével megkapjuk az i-t j-vel felcserélô transzpoziciót.

Definíció: Az α_i, α_j elemek **inverzió**Hiba! A könyvjelző nem létezik.ban vannak az $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_i & \dots & \alpha_j & \dots n \end{pmatrix}$ permutációban, ha $\alpha_j < \alpha_i$.

Definíció: Valamely **permutáció**t aszerint mondunk **páros**nak ill. páratlannak , hogy a permutációban lévô **inverziók száma páros** vagy páratlan. Az eddigiek alapján nyilvánvaló, hogy szomszédos elemek cseréjekor a permutációban lévô inverziók száma vagy 1-el nô, vagy eggyel csökken. S mivel bármely transzpozicó az identikus permutációból páratlan sok szomszédos elem cseréjével megkapható, ezért **bármely transzpozició páratlan permutáció.**

Tétel: _Bármely permutáció elôáll véges sok transzpozició szorzataként._

Bizonyítás: Ha adott véges sok elemnek egy rögzített sorrendje, akkor elemeknek páronkénti felcserélésével eljuthatunk bármely más elôre rögzített sorrendhez is. Az elemeknek a száma szerint bizonyíthatunk. n=1,n=2-re az állítás triviális. Tegyük fel, hogy az állítás igaz n≥2 -re és bizonyítsuk n+1-re. Az indukciós feltevés szerint elérhetô

transzpoziciókkal, hogy az elsô n-1 elem a helyén legyen, ha az utolsó kettô nem a helyén áll , akkor megcserélve ôket kész vagyunk a bizonyítással.

Következmény: _A páros permutációk a szorzásra nézve csoportot alkotnak._

A páros és a páratlan permutációk száma megegyezik, ha $n \geq 2$.

Az n elem összes permutációinak a csoportját többféle módon is lehet reprezentálni. Legyen adott az n dimenziós térben egy szabályos n+1 csúcspontú SZ_{n+1} szimplex. Az SZ_{n+1} szimplex önmagára való **távolságtartó homogén lineáris leképezéseinek a csoportja**, pontosan az n+1 elem szimmetria csoportjával egyezik meg.

Tekintsük azokat az $E_{\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_i & \dots & \alpha_j & \dots & n \end{pmatrix}}$ (n+1)*(n+1)-es mátrixokat, amelyek az (n+1)*(n+1) E egység mátrixból úgy keletkeznek, hogy az i.-ik oszlopba E α_i.-ik eleme kerül. Az $E_{\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_i & \dots & \alpha_j & \dots & n \end{pmatrix}}$ mátrixok a szokásos szorzásra nézve csoportot alkotnak, s e csoport izomorf az (n+1) elem szimmetria csoport**Hiba! A könyvjelző nem létezik.**jával.

Feladatok:

1. Az A városból B városba 5 onnan C-be 3 út vezet. Hányféleképpen lehet eljutni A-ból C-be, B-n keresztül?

2. Két végvárnak 100, 100 katonája van 1, 1 katonát kiállítanak párviadalra. Hányféleképpen választhatnak ki egy párt?

3. Egy hegy csúcsára 5 út vezet. Egy turista felmegy valamely úton, majd lejön egy másikon. Hányféle útvonal között választhatott?

4. A sakktáblán hányféleképpen választhatunk ki

(i) egy fehér és egy fekete mezôt,

(ii) egy fehér és egy fekete mezôt oly módon, hogy különbözô sorba és különbözô oszlopba legyenek?

5. Hat házaspár közül, hányféleképpen lehet kiválasztani egy férfit és egy nôt, hogy a két kiválasztott nem házaspár?

6. Egy kosárban 12 alma ill. 10 barack van. Juliska kivesz 1 almát, vagy egy barackot. Juliska után Jancsi választ egy almát és egy barackot is. Mikor van Jancsinak több választási lehetôsége, ha Juliska almát, vagy ha barackot vett?

7. Jancsika és Juliska virágot szedtek az erdôben, 15 hóvirágot, 10 ibolyát, és 20 gólyahírt. Hazafelé menvén elosztották a virágot egymás között hányféleképpen tehették meg azt?

8. Az A ill. B városokat 2 fôútvonal köti össze és azokat 9 másodrendű útvonal keresztezi. Hányféle úton lehet eljutni A-ból B-be, feltéve hogy egy úton legfeljebb egyszer megyünk végig?

9. Az A-ból induló vonaton n utas van, s B-ig m megálló, legkésôbb B-ben mindenki kiszáll. Hányféleképpen történhet ez?

10. Értelmezze az elôbbi feladatot oly módon, hogy az utasokat egyformának tekinti, s válaszolja meg az ott feltett kérdést?

11. Négy diák analízisbôl vizsgázott Száz Árpádnál hányféle eredménye lehet a vizsgának, ha aznap csak 5,4,3 -as jegyek születtek?

12. Hány pozitív osztója van az n egész szám, ha n= p^{α} ?

13. Az 52 lapos francia kártyából 13-13-at osztónak 4 embernek, hányféleképpen lehetséges ez?

14. Hányféleképpen lehet a 32 lapos magyar kártyából 6-t kiválasztani oly módon, hogy mind a 4 szín szerepeljen legalább egyszer?

15. Józsikának 6 barátja van, 20 alkalommal meghív közülük hármat. Hányféleképpen teheti ezt meg úgy, hogy ugyanaz a társaság ne jöjjön össze kétszer?

16. Rajzoljon 5 olyan téglalapot, melyek oldalainak a hosszai az 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 számok közül kerülnek ki, méghozzá úgy hogy mindegyik pontosan egyszer lép fel (ha a téglalapok egyforma oldalait egyszeres multiplicitással számoljuk,), s az öt téglalap megfelelô módon egymás mellé helyezve egy újabb téglalapot alkot.

17. Hány négyjegyű ill. ötjegyű számot írhatunk fel 5 ill. 6. páratlan számjegy segítségével.

18. Hány olyan ötjegyű szám van a tízes számrendszerben, melyben

(i) a 0 nem fordul elô,

(ii) legalább egy páros számjegyet tartalmaz,

(iii) a 3 és a 7 számjegyeket tartalmazza.

19. 8 egyágyas szállodai szobába, hányféleképpen lehet elhelyezni 5 turistát?

20. Fehér,fekete, sárga, kék,piros és zöld gyöngyökbôl hányféle 4 tagú láncot lehet csinálni? Mennyi lesz azon láncok száma , amelyekben legalább egy piros és legalább egy zöld színű gyöngy is van?

21. Piros,fehér,zöld és kék színű golyóink vannak 6 különbözô méretben. Négy dobozban elhelyezünk hat-hat golyót ügyelve arra, hogy egy dobozba különbözô méretű, de azonos színű golyók kerüljenek. Hányféle módon lehet 4 különbözô méretű és színű golyót kiválasztani a dobozokból.

22. Határozza meg a hétjegyű számok közül azoknak a számát, amelyek

(i) csak páratlan,

(ii) csak páros,

(iii) 5 páros és 2 páratlan,

(iv) 4 páros és 3 páratlan számjegyet tartalmaznak.

23. A 32 lapos magyar kártyából 7 lapot húzunk. Hányféleképpen lehet az ász, király, felsô, alsó, tízes, kilences, nyolcas sorrendet kihúzni.

24. Egy társaságban 5 férfi és 5 nô van. Hányféleképpen lehet ôket egy kerek asztal köré úgy leültetni, hogy ne üljön két nô egymás mellett?

25. Határozza meg azoknak az ötjegyű számoknak az összegét, melyekben

(i) legfeljebb az 1,2,3,4,5 számjegyek szerepelnek,

(ii) az 1,2,3,4,5 számok legfeljebb egyszer fordulnak elô,

(iii) legfeljebb a 0,2,3,4,5, számjegyek állhatnak,

(iv) melyeknek minden jegye különbözô.

26. Három férfi és három nôi manökent, hányféleképpen lehet oly módon sorba állítani, hogy sem két nô sem két férfi nem állhat egymás mellett?

27. m férfi és n nô közül k-t kiválasztanak (mindegyik kiválasztott más-más ajándékot kap). Hány olyan eset lesz, amikor a kiválasztottak között pontosan l hölgy lesz?

28. Adott a síkon n darab általános helyzetű egyenes (nincs közöttük 2 párhuzamos és semelyik három nem illeszkedik egy pontra). Hány tartományra bontják a síkot?

29. Adott a 3 dimenziós euklideszi térben n általános helyzetű sík (semelyik kettô nem párhuzamos, semelyik három nem illeszkedik egy egyenesre, semelyik négynek nincs egy közös pontja). Hány részre bontják a teret?

30. 2n különbözô tényezôbôl álló szorzatot, hányféleképpen lehet két-két tényezôbôl álló tényezôk szorzatára bontani.

31. Hányféleképpen lehet öt dobókockával 8-at dobni?

32. Hányféleképpen lehet három dobókockával 14-et dobni?

33. Hányféleképpen helyezhetünk el egy 5 polcos szekrénybe 18 könyvet, ha egy polcon elfér mind a 18?

34. Egy házaspár hat úrból és hat hölgybôl álló társaságot hív vendégségbe, oly módon hogy hatan a férj és hatan a feleség ismerôsei. Hányféleképpen tehetik ezt, ha a férjnek öt nô és hét férfi, a feleségnek hét nô és öt férfi ismerôse van?

35. Hófehérke levelet írt a hét törpének. A gonosz boszorkány azonban összecserélte a leveleket oly galádul, hogy senki sem a sajátját kapta. Hányféleképpen tehette meg azt a gonosz boszorka.

36. Háromféle témáról levelez 17 tudós. Bármelyik tudós bármelyik másikkal levelez, de csak egy témáról. Bizonyítsa be, hogy van közöttük legalább 3 tudós akik ugyanarról a témáról leveleznek egymással.

37. Bizonyítsa be, hogy $\binom{n+m}{k}=\binom{n}{0}\binom{m}{k}+\binom{n}{1}\binom{m}{k-1}+\ldots+\binom{n}{k}\binom{m}{0}$!

38. Hány szótárt kell kiadni, hogy közvetlenül lehessen fordítani, 11 különbözô nyelv bármelyikérôl, bármely másikra?

39. Hány 0-ra végzôdik a $11^{1000}-1$ szám?

40. Határozza meg az x^8-on együtthatóját az $\left(1+x^2-x^3\right)^7$ polinomban!

41. 100 szám közül hány olyan van, amely

(i) nem osztható sem 2-vel, sem 3-mal,

(ii) nem osztható sem 2-vel, sem 3-mal, sem 5-tel,

(iv) nem osztható sem 2-vel, sem 3-mal, sem 5-tel, sem 7-tel?

42. Az n elemű halmaznak, hány lineáris rendezése van?

43. Egy csomag magyar kártyából, hányféleképpen lehet kiválasztani

(i) négy páronként különbözô színű lapot,

(ii) négy páronként különbözô színű és értékű lapot,

(iii) négy olyat, melyek közül kettô király?

44. Az ultinál, hányféle leosztás lehetséges?

45. Három gyermek között szétosztunk 17 darab 50 forintos érmét. Hányféleképpen lehet megcsinálni az elosztást,

(i) ha az is elôfordulhat, hogy valamelyik gyerek egy érmét sem kap,

(ii) ha bármelyik gyermek legalább egy érmét kap,

(iii) ha bármelyik gyermek legalább három érmét kap?

46. Hányféleképpen húzhat fel valaki az egyik kezének ujjaira 4 különbözô gyűrűt, ha a hüvelykujjára nem húz gyűrűt és ha bármely másik ujjára fel fér mind a 4.

47. 25 lány között 8 rózsát, 3 íriszt, 5 amarilliszt, 8 tulipánt és egy orchideát osztottak szét oly módon hogy mindegyikük egy-egy virágot kapott. Mennyi a lehetséges elosztások száma?

48. A könyvespolcon 17 könyv van. Hányféleképpen lehet közülük kiválasztani 6 olyat, mely nem egymás mellett áll?

49. Legyen az n szám kanonikus alakja $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$. Határozza meg az n különbözô pozitív osztóinak a számát!

50. Hány olyan "szó" készíthetô a felejthetetlen szóból, amelyben e betűk nincsenek egymás mellett?

51. Hányféleképpen bonthatunk fel egy n természetes számot három természetes szám összegére? (A sorrendet is figyelembe véve.)

52. Adott a síkon az e ill. f párhuzamos egyenesek e-n m darab, f-en n darab különbözô pont van. Hány olyan nem elfajuló háromszög van a síkon melynek a csúcsai az adott pontok közül kerülnek ki?

53. Egy négyzet minden oldalát n egyenlô részre osztunk. Hány olyan háromszög van, amelynek csúcsai az elôbb említett osztópontok közül kerülnek ki?

54.Adott a síkon n darab egyenes, amelyek közül nincs három , mely egy pontra illeszkedne és bármely kettô metszi egymást. Hány metszéspontja van az n darab egyenesnek?

55.Adott a síkon n darab pont, melyek közül semelyik 3 nincs egy egyenesen. Hány egyenesét határozzák meg az elôbb említett pontok a síknak?

56. Adott a háromdimenziós térben n pont, melyek közül semelyik három nincs egy egyenesen, közülük m viszont egy síkban helyezkedik el, a megmaradt n-m pont közül már semelyik négy nem komplanáris. Hány sík illeszthetô az adott n pontra?

57. Hány olyan háromszög van, melynek csúcsai egybeesnek egy adott konvex n szög csúcsaival , de nincs közös oldaluk?

58. Kombinatorikai úton igazolja, hogy

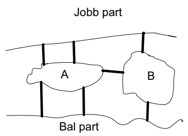
(i) $\binom{n}{1}+6\binom{n}{2}+6\binom{n}{3}=n^3$ (ii) $1+7\binom{n}{1}+12\binom{n}{2}+6\binom{n}{3}=(n+1)^3$

(iii) $1+14\binom{n}{1}+36\binom{n}{2}+24\binom{n}{3}=(n+1)^4-n^4$

(iv) $\binom{n}{1}+14\binom{n}{2}+36\binom{n}{3}+24\binom{n}{4}=n^4$!

Euler-gráfok, Hamilton-utak és Hamilton-körök

Leonard Euler (1707-1783) nevéhez kapcsolódik az elsô gráfelméleti munka, mely 1736-ban jelent meg a Szentpétervári Tudományos Akadémia közleményeiben. Az értekezését Euler az ún. Königsbergi hidak problémájával kezdte. A Pregel folyó A, B szigeteit hidak kötötték össze egymással és a partokkal is. Az A szigetet két párhuzamos híd kötötte össze a jobb parttal, egy híd a B szigettel, s ugyancsak két párhuzamos híd vezetet az A-ról a bal partra is. B-t egy-egy híd kötötte össze a bal és a jobb parttal is és B-rôl vezetet egy híd A-ra is , melyet az elôbb már említettünk. A kérdés az volt, be lehet e járni a hidakat valamely fix C pontból oly módon, hogy minden hídon átmegyünk pontosan egyszer. Euler lényegében teljes általánosságban megoldotta a feladatot.



Definíció: A $G=(E,\varphi,V)$ gráf L élsorozatát ($\varphi(e_1)=(v_0,v_1),\varphi(e_2)=(v_1,v_2),\ldots,\varphi(e_n)=(v_{n-1},v_n)$)-t **zárt Euler-vonal**Hiba! A könyvjelző nem létezik.nak nevezzük, ha E minden élét pontosan egyszer tartalmazza és $v_0=v_n$, ha $v_0\neq v_n$ akkor L-t **nyílt Euler-vonal**nak mondjuk.

Ha valamely gráfnak van zárt Euler-vonala szokás azt **Euler-gráf** névvel illetni. Nyilván egy Euler-gráf összefüggô és bármely csúcspontjának a foka páros, mivel ha az Euler-vonala betér valamely csúcspontba mind annyiszor ki is megy onnan. Megjegyezzük, hogy van aki Euler-gráfnak nevez olyan gráfot, amelynek bármely csúcsfoka páros. A következô tétel lényegében Eulertôl származik.

(E1) Tétel: *A G gráf akkor és csak akkor Euler-gráf**Hiba! A könyvjelző nem létezik.**, ha összefüggô és bármely csúcsának a foka páros*.

Bizonyítás: Az, hogy egy Euler-gráf szükségképpen összefüggô és minden csúcspontjának a foka páros, az remélhetôen világos a tétel elôtti sorokból. A feltétel elégséges voltához tekintsük a G gráf valamely v_0 csúcsát. Az e_1 él vezessen v_0-ból v_1-be, s v_1-bôl e_2 v_2-be, és így tovább végül e_k elvisz $v_k=v_0$-ba, mert ha valamely csúcspontba bementünk a csúcspont fokának páros volta miatt ki is tudtunk jönni. Ha a kapott L_1 élsorozat tartalmazza a G gráf valamennyi élét, akkor kész vagyunk. Ha nem tartalmazza például az e' élt és u_1,u_2 ezen él két végpontja, akkor u_1-bôl indulva az elôbbiekhez hasonlóan találunk egy ugyancsak u_1-ben végzôdô L_2 zárt vonalat. Ha u_1 az L_1 zárt vonal valamely élére is illeszkedett (vagy L_2 valamely másik csúcspontja illeszkedett L_1-re), akkor az L_1,L_2 zárt vonalakat lehet egyetlen zárt vonalnak tekinteni. {Ha az L_1 ill. L_2 éleinek nem volna közös csúcspontja, akkor L_2-t cseréljük ki oly módon , hogy elôször vezessünk u_1-bôl utat L_1 valamely csúcspontjába, olyan utat, amelynek nincs közös éle L_1-el, s ezt az utat egészítsük ki az L_2' zárt vonallá az elôbbi módon.} Ha nem maradt ki él kész vagyunk, ha igen akkor megismételjük az elôbbi eljárást és mivel a gráfunk véges elôbb vagy utóbb az eljárásunk véget ér és megadja a G gráf egy zárt Euler-vonalát.

(E2) Tétel: *Ha a G egyszerű összefüggô gráfnak, 2k darab páratlan fokú csúcspontja van, akkor élei lefedhetôk k darab nyílt Euler-vonallal*.

Bizonyítás: Egészítsük ki a G gráfot k darab éllel G'-vé, oly módon, hogy G' minden csúcsának a foka páros legyen, ez nyilván megtehetô, ha ügyelünk arra, hogy az új élekkel mindig páratlan fokú csúcsokat kössünk össze. G'-re ekkor teljesedni fog az E1 tétel feltétele, s ezért lesz egy zárt Euler-vonala is, mely triviálisan tartalmazza az "új" k darab élt is. Ha a k darab új élt töröljük k darab nyílt Euler-vonalat kapunk. (Miért nem kaphatunk kevesebbet k-nál?), s a bizonyítás ezzel kész.

Hamilton-út, Hamilton-kör

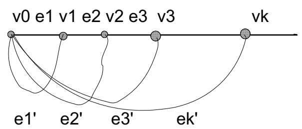
Sir Villiam Rovan Hamilton (1805-1865) 1859-ben egy olyan játékot hozott forgalomba, melynek a lényege az volt, hogy egy elôre megadott gráf csúcspontjait kellett bejárni, oly módon, hogy bármely csúcsban pontosan egyszer kellett járni. Állítólag a játéknak nem volt átütô sikere Hamilton kortársai között.

Definíció: A $G=(E,\varphi,V)$ gráf H útját ($\varphi(e_1)=(v_0,v_1),\varphi(e_2)=(v_1,v_2),\ldots,\varphi(e_n)=(v_{n-1},v_n)$)-t **Hamilton-út**Hiba! A könyvjelző nem létezik.nak mondjuk, ha $v_0,v_1,\ldots,v_n$ csúcsok mind különbözôk és e csúcspontokon kívül más csúcspontja nincs G-nek.

Definíció: A $G=(E,\varphi,V)$ gráf K körét **Hamilton-kör**nek mondjuk, ha K tartalmazza G minden csúcspontját is.

Látszólag nagyon hasonló probléma, hogy valamely gráfnak az éleit járjuk be pontosan egyszer, vagy a csúcspontjait. Az utóbbi azonban jóval nehezebb. S az általános esetben Hamilton-utak illetve Hamilton-körök keresésére ma sem ismert igazán jó algoritmus. Operációkutatás területéhez tartozik az utazó ügynök problémája. Az **utazó ügynök**Hiba! A könyvjelző nem létezik. **problémája** azt jelenti, hogy a kereskedelmi utazónak adott városokat kell bejárnia, oly módon, hogy minden városba csak egyszer megy el, és végül visszatér a cégének a székhelyére. Ez esetben a gráf csúcspontjai az utazó által meglátogatandó városok, az élek pedig a városokat összekötô útvonalak. Természetesen egy-egy útnak jól meghatározott utiköltsége is van, s több út esetén célszerű azt az utat választani, melynek a **költsége minimális**. Ha valamely G gráf éleihez valós számokat rendelünk, akkor hálózatokról, folyamokról beszélünk. S nagyon természetesen vetôdik fel **minimális költségű** ill. **maximális nyereségű utak** esetleg **körök** keresése. Az elôbb említett feladatok a **kombinatorikus optimalizálás** tárgykörébe tartoznak. A következô tétel megfogalmazása elôtt említjük meg, hogy egy **kör ill. út hosszán a bennük szereplô élek számát** értjük.

(H1)Tétel: *Ha a G egyszerű gráfban bármely csúcspont foka legalább k ($k\geq 2$), akkor van a gráfban egy legalább k+1 hosszúságú kör*.



Bizonyítás: Legyen a G gráfnak az L út a leghosszabb útja. S ezen út csúcspontjait a kezdô ponttól indulva jelölje rendre $v_0,v_1,\ldots,v_k,v_{k+1},\ldots,v_n$. Az, hogy v_0 foka legalább k azt jelenti, hogy a v_0-t v_1-el összekötô e_1 élen kívül még legalább k-1 él indul ki v_0-ból. Ezen élek másik végpontjai szükségszerűen szerepelnek L csúcspontjai között, mert ellenkezô esetben összeütközésbe kerülnénk azzal, hogy az L út a leghosszabb. Legyen e_2' másik végpontja mondjuk v_2, e_3' végpontja v_3 és végül e_k'

végpontja v_k. Ekkor az L útnak a v_0-tól v_k-ig tartó rész útjának két végpontját köti össze e_k', ezért egy kört kapunk, melyben legalább k+1 él van, s ezzel a bizonyítás kész.

(H2)Tétel: *Ha a $G=(E,\varphi,V)$ egyszerű gráf bármely v csúcsának fokára teljesül, hogy $\delta(v)\geq\frac{|V|}{2}=\frac{n}{2}$, akkor G összefüggô.*

Bizonyítás: Legyen u és v két különbözô csúcsa G-nek. A feltétel szerint u-val és v-vel is legalább n/2, n/2 pont van összekötve az u-ból illetve v-bôl induló élek által, a fokszám feltétel miatt. Az elôbb említett u-val, illetve v-vel közvetlenül összekötött pontok között van olyan, mely u-val is v-vel is össze van kötve, (ha nem lenne ilyen akkor G csúcsainak a száma nagyobb egyenlô volna, mint [n/2+n/2+2]) azaz u és v között vezet út.

Ha adott a $G=(E,\varphi,V)$ gráf, a csúcsainak a számát $|V|=n$ szokás **G rendjének**Hiba! A könyvjelző nem létezik. mondani, s éleinek számát $|E|=q$ a **G gráf méreté**Hiba! A könyvjelző nem létezik.**nek** mondani. Ha az u-t az e él összeköti a v csúccsal, akkor u-t ill. v-t az e él **vég pont**Hiba! A könyvjelző nem létezik.**jai**nak nevezzük és **u-t ill. v-t szomszédos**nak mondjuk. Az u csúcsponttal szomszédos csúcsok halmazát N(u)-val jelöljük.

(H3)Tétel(O.Ore (1960.)): *Ha a G gráfra teljesül, hogy rendje n≥3 és bármely két nem szomszédos u,v csúcspont fokának az összege nagyobb egyenlô G rendjénél ($\delta(u)+\delta(v)\geq n$), akkor G-nek van Hamilton-köre.*

Bizonyítás: Indirekt bizonyítunk. Azon gráfok közül, melyekre a tétel feltételei teljesednek, de az állítás nem, tekintsük valamelyiket azon G' gráfok közül, melynek az éleinek a száma minimális. Ha G'-hez hozzá vesszünk egy olyan e élt, mely a nem szomszédos u és v éleket köti össze, akkor az így kapott G gráf már tartalmazni fog Hamilton-kört G' minimalitása miatt. G minden Hamilton köre tartalmazza az e élt, ezért van olyan L Hamilton-útja G'-nek, mely u-t és v-t köti össze, legyen az megadva $\varphi(e_1)=(v_0,v_1),\varphi(e_2)=(v_1,v_2),\ldots,\varphi(e_n)=(v_{n-1},v_n)$ $(u=v_0,\ v=v_n)$ által. A $v_0,v_1,\ldots,v_k,v_{k+1},\ldots,v_n$ csúcspontokkal kapcsolatban vegyük észre, hogy ha v_{k+1} szomszédos u-val azaz v_{k+1} eleme N(u)-nak, akkor v_k nem eleme N(v)-nek. Ellenkezô esetben a $v_0,v_{k+1},v_{k+2},\ldots,v_n,v_k,v_{k-1},\ldots,v_0$ Hamilton-köre volna G'-nek. Tehát a V-{v} pontok közül az u-val szomszédos pontok nem szomszédosak v-vel, ezért $\delta(u)\leq(n-1)-\delta(v)$ s ez utóbbi egyenlôtlenség ellentmond a tétel feltételeinek.

Következmény(G.A. Dirac (1952)): *Ha az n=2k csúcspontú egyszerű G gráf bármely pontjának a foka legalább k, akkor van G-nek Hamilton-köre.*

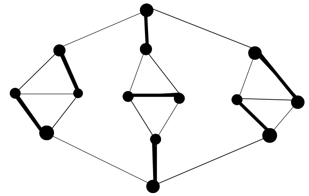
Valóban G-ben létezik Hamilton-kör, mivel a következmény feltételei lényegében szigorúbbak, mint a (H3) tétel feltételei.

Definició: A G gráf G' részgráfját G **k-adfokú faktor**Hiba! A könyvjelző nem létezik.ának mondjuk, ha

(i) G' csúcsainak halmaza megegyezik G csúcsainak halmazával,

(ii) G' bármely csúcsa azonos fokszámú.

A definícióból látható, hogy valamely G gráfnak a K Hamilton-köre egyben **másodfokú faktor**Hiba! A könyvjelző nem létezik.a G-nek.



A mellékelt ábrán látható gráfnak vastag, szaggatott, illetve vékony vonallal jelöltük egy-egy elsôfokú faktorát. Ellenôrizze le a Kedves Olvasó, hogy a három elsôfokú faktor közül bármely kettô "szorzata" az ábrán látható gráfnak egy Hamilton-körét adja.

Definició: Legyen a G gráfnak $G_1,G_2,\ldots,G_k$ rendre $m_1,m_2,\ldots,m_k$-ad fokú faktorai, ha

(i) ha bármely i,j esetén G_i-nek ill, G_j-nek nincs közös éle,

(ii) a $G_1,G_2,\ldots,G_k$ részgráfok együttvéve tartalmazzák G összes élét, akkor G ezen **k számú faktor szorzatának** mondjuk.

> *Gyakorolj hát és törekedj, mint a régiek, hogy az újat megragadhasd; legfôbb szabályod ez legyen.* **Kung Fu-ce:** Lun-jü: II.könyv 11. fejezet.

Feladatok:

1; Igazolja, hogy ha egy élt is tartalmazó G gráf minden pontjának foka páros, akkor kijelölhetôk a gráfban körök úgy, hogy a gráf minden éle e körök közül pontosan egyben szerepeljen.

2; Bizonyítsa be, hogy ha az e él az összefüggô G gráfnak hídja, akkor G nem tartalmaz olyan kört, melyben az e él szerepel. (**Definíció szerint** a G összefüggô gráfnak az e élét **híd**Hiba! A könyvjelző nem létezik.nak mondjuk, ha e törlésével a G-bôl kapott gráf már nem összefüggô.)

3; Bizonyítsa be , hogy ha a G összefüggô gráfnak nincs olyan köre, amely az e élt tartalmazza, akkor e hídja G-nek.

4; Igazolja, hogy ha a G irányított gráf nem üres, és bármely v pontjára $\delta_{be}(v)=\delta_{ki}(v)$, akkor G lefedhetô körökkel oly módon, hogy bármely él pontosan egy körben szerepel.

5; Bizonyítsa be, hogy a teljes gráf tetszôleges irányítása mellett létezik olyan v pontja, melybôl bármely másik ponthoz vezet legfeljebb kettô hosszúságú út.

6; Mutassa meg hogy bármely G irányított gráfban a csúcsok kifokainak ill. befokainak összege az élek számával egyezik meg.

7; Bizonyítsa be, hogy bármely hidat nem tartalmazó G gráf irányítható oly módon, hogy erôsen összefüggô legyen. (A G **irányított gráf erôsen összefüggô**Hiba! A könyvjelző nem létezik., ha **bármely pontjából bármely másik pontjába vezet irányított út**.)

8; Mutassa meg, hogy igazak az alábbi állítások:

(i) Ha G nem üres gráf , összefüggô és bármely v pontjára $\delta_{be}(v)=\delta_{ki}(v)$ akkor G-nek van irányított Euler-vonala.

(ii) Ha a G nem üres irányított gráfnak van irányított Euler-vonala, akkor G bármely v pontjára $\delta_{be}(v)=\delta_{ki}(v)$ és G összefüggô.

9; Mutassa meg, hogy ha a G gráf nem üres és összefüggô, akkor élei bejárhatók oly módon, hogy minden élen kétszer megyünk végig és vissza térünk a kiindulási pontba. Az élek bejárása úgy is elvégezhetô, hogy minden élt mindkét irányban pontosan egyszer járunk be.

10; Legyen a G_1 gráf olyan részgráfja G-nek, mely tartalmazza a G v csúcspontját és G_1 Euler-gráf, feltesszük még, hogy G v-bôl tetszôlegesen bejárható. Töröljük G_1 éleit és a visszamaradt izolált pontjait G-nek, a megmaradt gráfot jelölje G_2. Mutassa meg, hogy G_1 és G_2 is v-bôl tetszôlegesen bejárható. (A G gráfot **v-bôl tetszôlegesen bejárható**nak mondjuk, ha v-bôl indulva és mindig be nem járt élen haladva szükségképpen G-nek valamely Euler-vonalát kapjuk.)

11; Mutassa meg, hogy ha páros számú utat úgy kapcsolunk össze, hogy kezdôpontjuk u-ra, végpontjuk v-re illeszkedik és u ill. v kívül más közös pontjuk nincs, akkor mind u-ból mind v-bôl tetszôlegesen bejárható gráfot kapunk. Mutassa meg, hogy bármely u-ból ill. v-bôl tetszôlegesen bejárható G gráf elôállítható az elôbbi módon.

12; Igazolja, hogy a kettônél több pontjukból tetszôlegesen bejárható G gráfok körök.

13; Jelölje a G irányított gráf csúcsait rendre $v_0, v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n$, mutassa meg hogy a $\sum_{i=0}^{i=n} \left|\delta_{ki}(v_i) - \delta_{be}(v_i)\right|$ szám páros.

14; Vizsgálja meg, hogy a 4x4-es sakktáblát be lehet e járni egyetlen lóval lóugrásokkal oly módon, hogy mindig olyan mezôre lépünk, melyen korábban még nem jártunk! (Tetszôlegesen választott mezôrôl indulhatunk.)

15. Végig lehet e járni az 5x5-ös sakktáblát az elôbb említett módon?

16. Bizonyítsuk be, hogy ha egy társaságnak bármely tagja ismer a társaságból legalább k embert, akkor közülük leültethetô egy kerek asztal mellé k+1 személy oly módon, hogy mindenkinek a két szomszédja ismerôse is egyben. (Feltételezzük, hogy k≥2 és az ismeretségek kölcsönösek.)

17. Bizonyítsa be, hogy ha az elôbbi feladatban említett társaság 6 fôbôl áll és k=3, akkor mind a hatan leültethetôk egy asztal mellé az elôzô feladat feltételeinek megfelelôen.

18; Legyen a G gráf csúcspontjainak a száma n≥4. Mutassa meg, hogy ha az n pontú egyszerű gráfban bármely ((n-1)/2)>k pozitív egész k-ra a k-nál nem nagyobb fokú pontok száma kevesebb mint k, akkor a G gráf összefüggô.

19; Mutassa meg ha a G gráf K körének e élének törlése után a G leghosszabb útját kapjuk, akkor K Hamilton-köre G-nek.

20; Igazolja, hogy ha egy n csúcspontú egyszerű gráf bármely leghosszabb útjának végpontjai fokszámainak összege n, akkor a leghosszabb utak között van olyan, melynek a végpontjai szomszédosak.

21. Mutassa meg, hogy ha valamely sakk versenyen mindenki mindenkivel egyszer mérkôzött, és döntetlen nem volt, akkor a versenyzôk sorba rendezhetôk oly módon, hogy mindenki gyôzött az utána következô ellen.

22. Bizonyítsa be hogy a legalább 2 pontú teljes gráfnak bármely irányítása mellet van irányított Hamilton-útja.

23. Irányítsa az 5 szögpontú teljes gráfot oly módon, hogy ne legyen a kapott gráfnak irányított Hamilton-köre!

24. Rajzoljon olyan 6 pontú 11 élű egyszerű gráfot melynek nincs Hamilton-köre.

25; Helyezzen el, az oktaéder minden lapjára egy-egy a lapot pontosan fedô tetraédert. Mutassa meg, hogy az így létre jött test élhálózatából álló gráfnak nincsen sem Hamilton-köre, sem Hamilton-útja.

26; Hány Hamilton-köre van a tetraéder ill. hexaéder (kocka) gráfjának.

27; Ha egy összefüggô gráf nem egyrétűen járható be (tehát legalább négy páratlan fokú csúcsot tartalmaz), akkor legalább két különbözô minimális lefedése van. (A lehetô legkevesebb vonalból álló lefedéseit egy gráfnak **minimális lefedés**Hiba! A könyvjelző nem létezik.nek mondjuk,és egy **vonal halmaz lefedô,** ha a gráf minden élét legalább egyszer tartalmazza .)

Szeparáló halmazok, szétvágó halmazok, vágások, páros gráfok

> *A lépcsôket szembôl másszuk meg mivel hátrálva, vagy oldalazva igen kényelmetlen volna.* **Julio Cortázar**: Az összefüggô parkok (Utasítások a lépcsô megmászásához), Kriterion, 1983,465. o.

Gyakran van arra szükségünk, hogy valamely G gráf olyan részgráfjáról beszéljünk, melyet $G=(E,\varphi,V)$ -bôl valamely éleinek elhagyásával kaptunk. Ha a törölt élek halmazát F jelöli, akkor a visszamaradt részgráfot röviden $G'=(E-F,\varphi,V)$-el jelöljük.

Definíció: A $G=(E,\varphi,V)$ egyszerű összefüggô gráf éleinek F részhalmazát **szeparáló halmaz**Hiba! A könyvjelző nem létezik.nak mondjuk, ha a $G'=(E-F,\varphi,V)$ gráf nem összefüggô.

Nem üres szeparáló halmaz mindig létezik, ha legalább két csúcsa volt az összefüggô G gráfnak, mivel bármely G gráf esetén G összes éleinek a halmaza triviálisan szeparáló halmaz. A $G=(E,\varphi,V)$ gráf csúcsai V halmazának nem üres részhalmazai W és W' legyenek adottak. W és W' részhalmazokra, teljesedjen még, hogy W=V-W'. Azaz W, W'*diszjunkt*ak és uniójuk V .

Definíció: A $G=(E,\varphi,V)$ egyszerű összefüggô gráf éleinek F részhalmazát W,W'-re vonatkozólag **szétvágó halmaz**Hiba! A könyvjelző nem létezik.nak mondjuk, ha F elemei W pontjait kötötték össze W' pontjaival.

Tétel: <u>*A* $G=(E,\varphi,V)$ *egyszerű gráf, akkor és csak akkor összefüggô, ha V-t nem lehet felbontani W,W' nem üres, diszjunkt részhalmazok uniójára oly módon, hogy*</u> $\left(ha \quad \forall e\in E \quad és \quad \varphi(e)=(v_1,v_2)\right)\Rightarrow\left((v_1,v_2\in W) \quad vagy \quad (v_1,v_2\in W')\right)$.

Bizonyítás: A tétel utolsó sorának a formulájában szereplô vagy ún. kizáró vagy. A tétel utolsó sora végül is azt mondja, hogy nincs olyan él, mely W valamely pontját kötné össze W' pontjával. Más szóval, ha léteznek a tételben említett tulajdonságokkal rendelkezô W, W' halmazok, akkor G nem összefüggô. Ha ugyanis G összefüggô volna, akkor létezne W-bôl induló, W'-ben végzôdô út. S az útnak legalább egy olyan e éle, amelynek egyik végpontja W-be másik W'-be esne.

Fordítva, ha G nem összefüggô, akkor legalább két komponense van. Legyen az egyik $G_1=(E_1,\varphi_1,V_1)$, ha W=V_1-nek és W'=(V-V_1)-nek választjuk, akkor látható a komponens definíciója miatt, nincs olyan e él, mely W-t kötné össze W'-vel.

Definíció: A G gráf F szeparáló halmazát **vágás**Hiba! A könyvjelző nem létezik.nak nevezzük, ha F nek nincs olyan valódi F' részhalmaza, amely szintén G szeparáló halmaza volna.

Nyilván azt is mondhatnánk, hogy a **vágás minimális szeparálás**Hiba! A könyvjelző nem létezik.. Ha valamely F szeparáló halmaz a G gráfot 3 vagy több komponensre bontotta fel, akkor F nem lehet vágás, mert bármely e F-béli élre F-{e} szeparáló halmaz. Ugyanis az e legfeljebb két komponenst köt össze.

Vegyük észre azt is, hogy egy vágás szükségképpen szétvágó halmaz is, de fordítva nem igaz. Van olyan G gráf és olyan F szétvágó halmaza G-nek, mely nem vágás. Mutasson legalább egyet!

A fentiek szerint igaz az alábbi állítás.

Tétel: <u>*A G összefüggô gráf bármely feszítô fájának van legalább egy közös éle G bármely szétvágó halmazával.*</u>

Megjegyezés: Vegyük észre, a G gráf T **feszítô fája** olyan **minimálisan összefüggô részgráfja** G-nek, mely G csúcsait összeköti. A G gráfnak F szétvágó halmaza, pedig olyan minimális halmaza éleknek, mely G bizonyos csúcsait elválasztja egymástól. Emlékezzünk arra is , hogy a G egyszerű összefüggô gráf T **feszítô fája** olyan **maximálisan összefüggô részgráf**Hiba! A könyvjelző nem létezik.**ja** G-nek, mely nem tartalmaz kört.

Tétel(Cayley): <u>*Az n szögpontú* K_n *teljes gráf különbözô feszítô fáinak a száma* n^{n-2}</u>.

A tétel közismert bizonyításai kissé komplikáltabbak az átlagnál, azért azt itt mellôzzük.

Kruskal-algoritmus Hiba! A könyvjelző nem létezik.**.** Legyen adott egy G egyszerű összefüggô gráf és legyenek az élei súlyozottak. A $G=(E,\varphi,V)$ **gráf élei súlyozott**ak, ha G bármely e éléhez hozzá van rendelve egy w valós szám. Sok feladatnál a súlyként szereplô valós számok nem negatívak. A Kruskal-algoritmus végül is arra való, hogy meghatározza egy súlyozott gráf **minimális feszítô fáját**. G valamely feszítô fáját minimálisnak mondjuk, ha az F éleihez rendelt **súlyok összege minimális,** azaz G bármely más F' feszítô fája esetén az F' éleihez tartozó súlyok összege nagyobb vagy egyenlô mint az F éleihez tartozó súlyok összege. Formulával leírva az elôbbit $\sum_{\forall e_i\in E(F)} w(e_i)\le\sum_{\forall e_i\in E(F')} w(e_i)$ teljesül G bármely F' feszítô fájára, ahol E(F) ill. E(F') jelöli F ill. F' éleinek a halmazát. A Kruskal algoritmus lényege röviden a következô. Válasszuk elôször G élei közül (E(G)-bôl) a minimális súlyút e_1-t. A második lépésben E_2=E(G)-{e_1}-bôl válasszuk a e_2-t ügyelve arra, hogy az e_1 e_2 élek ne alkossanak G-ben kört. S általában az algoritmus k.-ik lépése abból áll, hogy az $E_k=E(G)-\{e_1,e_2,\ldots,e_{k-1}\}$ él halmazból válasszunk egy olyan minimális súlyú e_k-t , mely a már kiválasztott $e_1,e_2,\ldots,e_{k-1}$ élekkel együtt nem alkot kört G-ben. Ha a mondott tulajdonsággal rendelkezô e él nem létezik, akkor az algoritmus véget ért. A konstrukcióból nyilvánvaló, hogy az eredményül kapott F fa gráf, feszítô fája G-nek. F minimalitását indirekt úton mutassuk meg. Tegyük fel hogy az F' feszítôfa éleihez rendelt súlyok összege kisebb, mint az F-hez rendeltek összege, és F-nek és F'-nek az élei is súlyuk nagyságai szerint sorba rendezettek azaz $w(e_1)\le w(e_2)\le\ldots\le w(e_{n-1})$ ill. $w(e_1')\le w(e_2')\le\ldots\le w(e_{n-1}')$. Ez azt jelenti, hogy legalább egy élük különbözik. Legyen az a sorrendben az elsô pl. e_j, ez azt jelentené, hogy nem a minimális súlyú élt választottuk a j.-ik lépésben s ez ellentmondás.

Tétel: <u>*Egy G összefüggô gráfban bármely F szétvágó halmaz bármely P zárt vonalnak páros sok élét tartalmazza.*</u>

Bizonyítás: Legyen adott a G gráf csúcsainak halmaza két, nem üres, W,W' diszjunkt részhalmazainak uniója. S az F szétvágó halmaza G-nek W,W'-re vonatkozólag, és legyen adott egy P zárt élsorozata G-nek. Induljunk el valamely P-beli csúcspontból, mely egyben W-nek is eleme. Ha P valamely e éle átmegy W'-be, akkor a zártság miatt olyan e'él is lesz, amelyikkel visszajutunk W-be. Ha a további barangolásunk során újólag W'-be bóklásznánk e_1 élen, a zártság miatt ismét W-be kell térnünk valamely e_1' éllel és így tovább, amíg végig nem poroszkálunk a P zárt vonal valamennyi élén. Az F halmaz szétvágó volta miatt az e,e',e_1,e_1',..,e_k,e_k' élek elemei F-nek, igaz tehát a tétel.

Néhány oldallal elôbb már beszéltünk egy-egy érdekesebb gráfról, mint például az n csúcspontú teljes gráfról. A szétvágó halmaz kapcsán megemlítjük a k particionálható gráfokat.

Definíció: A $G=(E,\varphi,V)$ gráfot **k particionálható**Hiba! A könyvjelző nem létezik.nak mondjuk, ha megadható V-nek olyan $V=V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_n$ osztályozása, ahol a $V_1, V_2, \ldots, V_n$ halmazok egyike sem üres és nincs olyan él, melynek mindkét végpontja ugyanazon V_i halmazban volna.

Páros gráfok

A gyakorlatban és az elméletben is kitüntetett szerepe van a k=2 esetnek, más néven a páros gráfoknak.

Definícó: A $G=(E,\varphi,V)$-t **páros gráf**Hiba! A könyvjelző nem létezik.nak mondjuk, ha V felbomlik két nem üres diszjunkt részhalmazára $V=V_1 \cup V_2$, ahol nincs olyan e él, melyre az teljesedne, hogy $\varphi(e)=(v_1,v_2)$ és $v_1,v_2 \in V_i$ ahol i=1,2.

Páros gráfra példa lehet egy estét végig táncoló farsangi társaság, ahol a csúcsok az emberek és két csúcs össze van kötve, ha az adott emberek az este során táncoltak egymással. Tegyjük fel, hogy csak páros táncokat táncoltak, és bármelyik férfi csak nôvel és bármelyik nô csak férfival táncolt. A társaság hölgy tagjait jelölve a csúcsok egyik, s a társaság férfi tagjait jelölve a csúcsok másik halmazának, nyilván páros gráfot kaptunk.

Tétel: <u>*Ha a G páros gráf, akkor bármely K körének az éleinek a száma páros.*</u>

Bizonyítás: Járjuk végig K éleit mondjuk K valamely V_2-bôl való V_0 pontjától kezdve. Az e_1 él v_1 pontba visz, mely V_1 eleme, mivel V_2-béli pont nincs összekötve V_2-béli ponttal. v_1-bôl V_2-béli pontba visz e_2, mivel V_1-béli pontokat nem köt össze él. Látható hogy a kör éleit egymásután bejárva váltakozva megyünk V_1-bôl V_2-be ill, V_2-bôl V_1-be. Körrôl lévén szó ha V_2-bôl rajtoltunk, akkor oda is kell vissza futnunk, s ezért az élek száma valóban páros.

Definició: A G páros gráf éleinek M részhalmazát párosításnak mondjuk, ha M bármely élének nincs közös végpontja.

Más szóval, M elemei párosítják (egymáshoz rendelik) a G páros gráf csúcspontjait. M-t **teljes**nek mondjuk ha M lefedi G csúcsait, s **maximális**nak, ha nem létezik M-nél nagyobb elem számú M' párosítása G-nek.

A G gráf **élei**nek M halmazát **függetlenek** mondjuk, ha M bármely két élének nincs közös végpontja. Az M **független él halmaz**Hiba! A könyvjelző nem létezik.**t teljes**nek mondjuk, ha M végpontjai között G minden pontja szerepel. Az M elemei két azonos számosságú részhalmazra bontják G pontjait, ezért nyilván igaz a következô állítás.

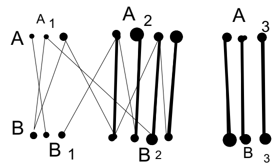
Tétel: <u>*Ha a G gráfban van független teljes M él halmaz, akkor G csúcsainak száma páros.*</u>

Az M halmazt **maximális**nak mondjuk, ha G **él**einek nincs olyan M' részhalmaza, mely **független** és több eleme van, mint M-nek. Jele: $G_{éfmax}$. A G gráf csúcspontjainak valamely S részhalmazát **lefogó** (leszúró) **ponthalmaz**Hiba! A könyvjelző nem létezik.nak mondjuk, ha G bármely élének legalább az egyik végpontja S-ben van. Jele: G_{lpmin}.

Tétel(Kônig Dénes (1931)): <u>*Bármely páros gráf független éleinek maximális száma egyenlô az éleket lefogó pontok minimális számával.*</u>

Bizonyítás: Az, hogy a lefogó pontok minimális száma nagyobb egyenlô ($G_{éfmax} \le G_{lpmin}$) mint a maximálisan független élek száma, a definícióból közvetlenül adódik. Legyen a G gráf páros azaz adott G csúcsainak egy $V=V_1 \cup V_2$ partíciója. Tegyük fel, hogy V_1 és V_2 pontokat két egymással párhuzamos egyenesen vettük fel . Nevezzük V_1 pontjait felsô pontoknak és V_2 pontjait alsó pontoknak. Kônig Dénes és Egerváry Jenô az 1930-as években kifejlesztettek egy módszer a maximális független élek meghatározására, melyet róluk magyar-módszernek is szoktak nevezni. E módszerrel lehet az ellenkezô irányú egyenlôtlenséget ($G_{éfmax} \ge G_{lpmin}$) bizonyítani.

Maximális számú élt tartalmazó párosítás keresése **magyar-módszer**Hiba! A könyvjelző nem létezik.rel. Tegyük fel hogy a páros gráfunk csúcsai A ill. B nem üres diszjunkt halmazoknak az elemei és A-ból A-ba, ill. B-bôl B-be nem fut él. Legyen adott G-nek egy M párosítása (M lehet üres is). G-nek valamely $e_1, e_2, e_3, e_4, \ldots, e_k$ útját **alternáló út**Hiba! A könyvjelző nem létezik.nak fogjuk nevezni, ha az élek felváltva elemei M-nek



illetve (E(G)-M)-nek, például $e_1 \in M$, $e_2 \notin M$, $e_3 \in M$, $e_4 \notin M$,.... Jelölje most a G páros gráf csúcspontjainak a halmazát $A \cup B$. Emlékezetetôül megjegyezzük, hogy A ill. B nem üres és diszjunkt, továbbá bármely él csak A-ból való pontot köthet össze B-beli ponttal (vagy mondhatjuk fordítva is, hogy csak B-beli pont van összekötve A-béli ponttal). A szövegbe helyezett ábrán vastag vonallal jelöltük M éleit, A_1,B_1 jelöli A ill. B M által le nem fedett pontjait. Ha találunk olyan alternáló $e_1, e_2, e_3, e_4, \ldots, e_k$ utat, mely B_1-bôl indul és A_1-ben végzôdik, akkor az $e_1, e_2, e_3, e_4, \ldots, e_k$ út M-ben lévô páros indexű éleit cseréljük ki a nem M-ben lévô páratlan indexűekre. Az így nyert új M' párosítása G-nek és M'-nek eggyel több eleme van mint M-nek. A következô lépésben meghatározzuk az M'-höz tartozó A_1',B_1' halmazokat és keressünk olyan alternáló utat, mely B_1'-bôl indul és A_1'-ben végzôdik. Az alternáló út páros indexű éleit M'-bôl törölve, s M'-höz csatolva az út páratlan indexű éleit a G-nek egy M'' párosítását kapjuk, melynek eggyel több eleme van, mint M'-nek. Az algoritmust nyilván addig lehet folytatni amíg találunk a fent említett típusú alternáló utakat. Meglehet mutatni, hogy mikor már nem lelünk alkalmas alternáló utat az utolsó lépésben kapott $M^{(n)}$ párosítás maximális párosítás.

Definíció: Ha a G egyszerű gráf bármely csúcsának a foka k, akkor G-t **k reguláris**Hiba! A könyvjelző nem létezik.nak mondjuk.

A Kedves Olvasó, ha kicsi k értékekre lerajzolja a k szögpontú teljes gráfot észre fogja venni, hogy azok k-1 regulárisak. S valószínűleg azt is belátja, hogy ha valamely fának kettônél több csúcsa van, akkor az nem lehet reguláris semmilyen k-ra sem.

Definíció: A G gráfot **k-szorosan összefüggô**Hiba! A könyvjelző nem létezik.nek mondjuk, ha bármely két különbözô v,v' csúcsa k darab olyan úttal köthetô össze, melyeknek a v,v' kívül más közös csúcspontjuk nincsen.

Nem nehéz észrevenni, hogy a k szögpontú teljes gráf $(k-1)$ szeresen összefüggô, s azt sem, hogy ha valamely G gráf nem tartalmaz hidat, akkor az legalább kétszeresen összefüggô.

Feladatok:

1; Bizonyítsa be, hogy bármely v-tôl w-ig haladó él sorozat tartalmaz v-tôl w-ig haladó utat.

2; Bizonyítsa be, hogy ha u és v összeköthetôk vonallal, valamint v és w is, akkor u és w is összeköthetô egy vonallal.

3; Bizonyítsa be, hogy minden u-t és v-t összekötô vonal, mely nem út, felbontható egy u-t v-vel összekötô útra és egy vagy több körre. Ily módon csupán az utak minimálisak abban az értelemben, hogy éleiknek egyetlen valódi részhalmaza sem köti össze végpontjaikat.

4; Bizonyítsa be, hogy egy zárt irányított vonal ,mely nem kör, két vagy több irányított körre bontható.

5; Mutassa meg, hogy u-ból v-be vivô irányított vonal, mely nem út, felbontható u-ból v-be vivô irányított útra, és egy vagy több irányított körre.

6; Igazolja, hogy ha D tartalmaz v-bôl w-be ill, w-bôl v-be vezetô irányított vonalat, akkor D tartalmaz zárt irányított vonalat. Adjon olyan példát a fenti feltételek mellet, mikor is nem létezik olyan zárt irányított vonal, mely v-re és w-re is illeszkedik.

7; Igazolja, hogy ha a D irányított gráf minden pontjának befoka pozitív, akkor D szükségképpen ciklikus gráf. (A G gráf ciklikus, ha G tartalmaz kört.)

8; Mutassa meg, hogy egy véges irányított D gráf, akkor és csak akkor erôsen összefüggô, ha létezik olyan zárt irányított élsorozat, amely minden élét legalább egyszer tartalmazza. (D erôsen összefüggô, ha bármely v csúcsából vezet irányított út bármely másik w csúcsába.)

9; Bizonyítsa be, hogy a D=(E,φ,V) irányított gráf, akkor és csak akkor erôsen összefüggô, ha a csúcsok halmazának, bármely W,V-W partíciójára a D-hez tartozó irányítás nélküli gráf megfelelô szétvágó halmaza tartalmaz legalább egy olyan élt, mely W-bôl V-be és egy olyat mely V-bôl W-be megy.

10;Bizonyítsa be, hogy ha a D irányított gráfban a $K_1, K_2, \ldots, K_n$ irányított körök olyan sorozata, melyek közül bármely két egymásután következônek van legalább egy közös csúcsa, akkor e körök által meghatározott részgráfja D-nek erôsen összefüggô.

11; Bizonyítsa be, hogy ha valamely egyszerű gráf nem teljes, akkor legalább egyféle módon lehet úgy irányítani, hogy az eredményül kapott irányított gráf ne tartalmazzon feszítôfát.

12; Egy gráf lehet szimmetrikus és tranzitív is ugyanakkor nem reflexív. Adjon erre példát! Mi jellemzi az elôbbi típusú gráfokat?

13; Konstruálja meg azokat a G gráfokat, melyek csúcsai a 0,1,2,3,....,11,12 egész számok és u és v éllel van össze kötve, ha (u,v)=1 és $u \equiv v^2$ mod(4)!

14; Ha egy összefüggô G gráf nem egyrétűen bejárható (tehát tartalmaz legalább négy páratlan fokú csúcsot) akkor bizonyítsa be, hogy legalább két különbözô minimális lefedése van.

15; Ha a G összefüggô gráf minimális lefedése k darab vonalat tartalmaz ,ahol k>1, akkor G egyetlen élének elhagyásával olyan G' gráfot kapunk, melynek minimális lefedései k-1,k vagy k+1 vonalat tartalmaznak.

16; Bizonyítsa be, hogy egy összefüggô Euler-gráf minden egyes szétvágó halmaza legalább két élt tartalmaz, továbbá hogy mindig páros számú élbôl áll.

Euler-formula, síkbeli gráfok, szabályos testek

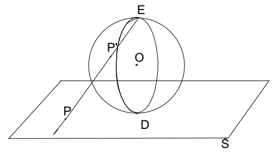
Feltételezzük, hogy a Kedves Olvasónak intiutíve elég pontos és korrekt fogalma van a sík görbékrôl, bár korrekt és kellôen általános görbe fogalommal, késôbb differenciál-geometriai tanulmányaikban találkozni fognak. Megemlítjük például, hogy egy egyszerű zárt Jordan-görbe két diszjunkt tartományra bontja a síkot. Például: egy origó középpontú r sugarú K kör P(r*sin(t),r*cos(t)) egy az origót tartalmazó körlapra és az azt körülölelô végtelen tartományra bontja a síkot. Egy G gráfot **síkba rajzolható**Hiba! A könyvjelző nem létezik.nak mondunk, ha a gráf éleit lehet realizálni a síkban olyan vonalakkal, hogy bármely két élnek csak a G gráf csúcspontjaiban lévô végpontjai lehetnek közösek.

Tétel: *Bármely G véges gráf realizálható a három dimenziós euklideszi térben*.

Bizonyítás: Legyen adott a $G(E,\varphi,V)$ gráf. Vegyünk fel a térben egy e egyenest, az egyenesen $n=|V|$ páronként különbözô V_i $(i=1,2,\ldots,n)$ pontot, és az e egyenesre illeszkedô $q=|E|$ páronként különbözô S_i $(i=1,2,\ldots,q)$ síkot, és mindegyik síkban P_i $(i=1,2,\ldots,q)$ pontot, olyat mely nem illeszkedik e-re. Ha az e_t él a v_i és a v_j pontokat kötötte össze azaz $\varphi(e_t)=(v_i,v_j)$, akkor kössük össze a V_i pontot P_t-vel egy u egyenes szakasszal, s P_t-t is V_j-vel kösse össze egy w szakasz. Az e élt az elôbb megkonstruált V_i-bôl V_j-be menô törött vonal fogja reprezentálni. A konstrukció alapján nyilvánvaló, hogy az éleknek megfelelô töröttvonalak csak a gráf csúcsainak kijelölt V_i pontokban találkozhatnak.

A következôkben olyan egyszerű összefüggô síkbeli gráfokkal foglalkozunk, melyek ún. sokszöghálót alkotnak. Sokszöghálót alkotnak abban az értelemben, hogy felbonthatók olyan minimális körökre, melyek a belsejükben már nem tartalmaznak a gráfnak semmilyen pontját, e köröket fogjuk **tartomány**Hiba! A könyvjelző nem létezik.**ok**nak nevezni (vagy **ország**Hiba! A könyvjelző nem létezik.**ok**nak). A gráf minden **csúcsának foka nagyobb mint kettô**, **bármely él pontosan két tartományt határo**l Ha Afrika térképét vesszük szemügyre, s nem ábrázolnánk Madagaszkárt és Lesotho-t (a Délafrikai Köztársaság belsejében), továbbá az országhatárokat és a tengerpartokat definiáljuk éleknek. A gráf csúcspontjainak tekintjük azon pontokat, ahol legalább három él találkozik, akkor egy **sokszögháló**Hiba! A könyvjelző nem létezik.t kapunk. Egy-egy országnak megfelelô **minimális** **kör**Hiba! A könyvjelző nem létezik.t (minimális abban az értelemben, hogy belseje nem tartalmazza a gráf semelyik csúcspontját) **tartomány**nak, vagy **ország**nak nevezzünk. Az Afrikát körülvevô végtelen tartományt tartománynak nevezzük.

Térképészetben gyakran használt eljárás a sztereografikus projekció, mikor is egy **G** gömb és egy **S** sík pontjai között létesítünk egy megfeleltetést.



Tételezzük fel, hogy a G gömbünk egy D pontban érinti a síkot. A D pont átellenes pontja legyen E (gondoljon a déli ill. az északi sarkra). A sík valamely P pontjának gömbi megfelelôjét P'-t megkapjuk, ha a P-t E-vel összekötô egyenesnek vesszük a G gömbbel a metszéspontját. A sztereografikus projekcióval a síkon ábrázolhatunk egy gömbre rajzolt gráfot és fordítva egy síkba rajzolt gráfot izomorf módon ábrázolhatunk a gömbön.

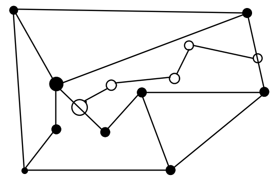
Legyen a $G(E,\varphi,V)$ gráf egy sokszöggráf, éleinek a számát q, csúcsainak számát n, és tartományainak számát jelölje t.

Tétel(Euler-formula) : *Ha G sokszöggráf, akkor*

(EF) $\qquad n-q+t=2.$

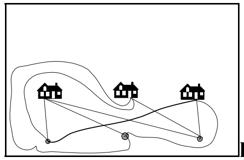
A fenti tételt szokás **Euler-féle poliéder tétel**Hiba! A könyvjelző nem létezik.nek is nevezni, mivel a háromdimenziós tér poliédereinek csúcspontjainak, éleinek és határoló oldal lapjainak a száma között állapít meg összefüggést. A poliéder fogalmának több dimenziós általánosításával és a poliéderek invariánsainak a meghatározásával foglalkozik többek között a kombinatorikus topológia.

Bizonyítás: A G gráf tartományainak száma szerinti teljes indukcióval bizonyítunk. Ha a G egyetlen egy körbôl áll, akkor a tartományok száma 2. Az élek és csúcsok száma megegyezik, ezért a t=2 esetén az állítás igaz. Legyen az állítás igaz t=k-ra igaz, s bizonyítsuk, hogy igaz t=k+1-re is. Ha adott a G gráf t tartománnyal, akkor t+1 tartománnyal rendelkezô G' gráfot oly módon kapunk, hogy valamely tartományt egy v vonallal két



tartományra bontunk. A vonal v_0 kezdô és v_s végpontja a G-nek is pontja volt (ez feltehetô), v_0-tól v_s-ig s-1 új csúcspont és s darab új él van. G'-re vonatkozólag ekkor n'=n+s-1,t'=t+1,q'=q+s és az indukciós feltevés miatt, ekkor $n'-q'+t'=2$. Az ábrán szagatott vonallal az "új" éleket és "üres" körökkel jelöltük az új pontokat.

Legyen adott a síkon két párhuzamos egyenes e és f. Legyen v_0,v_1,v_2 e egymás után következô 3 pontja, és f-nek három pontja u_0,u_1,u_2. A v_0,v_1,v_2 pontokat házaknak, s az u_0,u_1,u_2 pontokat kutaknak nevezzük. Azt a G gráfot, melynek a csúcsai az elôbbi kutak ill.

házak és bármely kutat, bármely házzal él köt össze a  **háromház-háromkút**Hiba! A könyvjelző nem létezik. gráfnak mondunk. Gráfok síkba rajzolhatóságát nem befolyásolja, ha valamely élükön egy új másodfokú csúcspontot vesszünk fel, vagy ha valamely két élét a gráfnak, amelyek ugyan arra a v másodfokú csúcsra illeszkedtek egybeolvasszuk, s v-t töröljük. Az elôbbi két transzformációt házi használatra, nevezzük topológikus bôvítésnek illetve szűkítésnek.

Definíció: A G gráfot a G' gráffal topológikusan izomorfnak mondjuk, ha G-bôl véges sok topológikus szűkítéssel ill. bôvítéssel G'-el izomorf gráf állítható elô.

Tétel(G. Kuratowski (1930)): *A G gráf akkor és csak akkor síkba rajzolható, ha nincs olyan részgráfja, amely topológikusan izomorf az ötszögpontú K_5 teljes gráffal, vagy a háromház-háromkút $K_{3,3}$ gráffal*.

A K_5, s a $K_{3,3}$ gráfokat a fenti tétel kapcsán Kuratowski-féle gráfoknak is szokták nevezni. A tételt nem bizonyítjuk. Az Euler-formulából segítségével azonban könnyen bizonyítható, hogy a Kuratowski-féle gráfok nem síkba rajzolhatók.

Tétel: *A Kuratowski-féle gráfok nem rajzolhatók síkba*.

Bizonyítás: Az Euer-formula szerint, ha K_5,$K_{3,3}$ síkba rajzolható, akkor

t_5=2+q-n=2+10-5=7, $t_{3,3}$=2+q-n=2+9-6=5.

Figyelembe véve, hogy K_5 egy-egy tartományát legalább 3 él határolja és minden él pontosan két tartománynak a határa, ekkor 3t≤2m egyenlôtlenségnek kellene teljesedni, ami itt 3*7≥2*10 miatt nem igaz. $K_{3,3}$ -ról tudjuk, hogy páros gráf, s ezért nincs olyan köre, mely páratlan sok élt tartalmazna, ezért $K_{3,3}$ tartományait (a tartományok határai kört alkotnak) legalább 4 él határolja. Az elôbbiek alapján $K_{3,3}$ éleinek a száma alulról becsülhetô 4*$t_{3,3}$*(1/2)=10-el, s ez ellentmond annak, hogy $K_{3,3}$-nak csak 9 éle van.

Síkba rajzolható G gráfokhoz sok esetben hasznos hozzárendelni egy G* duális gráfot a következô módon. G minden T_i tartományában felveszünk egy u_i pontot. Legyen e_s olyan éle G-nek, mely a T_i,T_j tartományok határán fekszik, ekkor vezessen e_s* él u_i-ból u_j -be. Gyakorlás céljából ajánljuk a Kedves Olvasónak rajzolja le a szabályos hatszög gráfjának duálisát. Megemlítjük itt még, hogy ha a k él által határolt tartományok számát φ_k-val jelöljük, akkor egyrészt φ_1=0 (, mivel sokszög gráfoknál kizártuk a hurok éleket), másrészt

(D1) $2q = 2\cdot\varphi_2 + 3\cdot\varphi_3 + 4\cdot\varphi_4 + \ldots + k\cdot\varphi_{k2} + \ldots$.

Szabályos poliéderek

A háromdimenziós euklideszi térben azokat a **konvex poliéder**Hiba! A könyvjelző nem létezik.eket szokták s**zabályos**nak nevezni, melyeknek az **élei, élszögei és lapszögei egyenlôek**. A poliéder élei és csúcsai olyan G szabályos síkgráfot alkotnak (az, hogy síkba rajzolhatóak a sztereografikus projekcióval látható be), mely gráfnak minden csúcspontjának

a foka egyenlô (egyenlô például r-rel)és minden tartományt ugyanannyi mondjuk r* él határol. Továbbá G duálisa G* is szabályos. Jelölje a G szabályos poliéder csúcsainak, éleinek, tartományainak, a csúcsok fok számát és a tartományokat határoló élek számát rendre n,q,t r,h hasonlóan G* megfelelô adatai legyenek rendre n*,q*,t*,r*,h*. A G gráf élei és a csúcspontok fokszámai között teljesül a

(i) 2q=rn, továbbá rn=ht.

q-t és t-t kifejezve (i)-bôl, adódik q=(1/2)rn és t=(r/h)n. Helyettesítsük q-t illetve t-t az (EF) Euler-formulába. Azt kapjuk, hogy

(ii) n[(1+(r/h)-(1/2)r]=2

vagy 2h-val végig szorozva

(iii) n[2h+2r-rh]=4h,

mivel n és h pozitív egészek, ezért írható

(iv) 2h+2r-hr>0 ill.

(v) hr-2h-2r<0

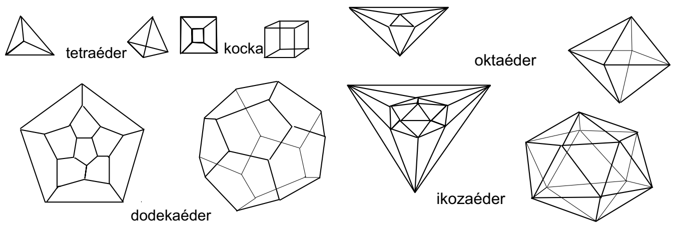
(v)-t szorzattá alakítva és rendezve, nyerjük

(vi) (h-2)(r-2)<4.

A (vi) egyenlôtlenségnek h és r pozitív egész volta miatt csak véges sok megoldása van. Vannak olyan megoldások, melyekhez tartozó gráfok számunkra geometriai okok miatt érdektelenek. Például ha r=2, akkor a gráf minden szögpontjában két él találkozik, azaz a G gráf kör, ha h=2, akkor csúcsok száma 2 és a G ekkor a két szögpontból s az azokat összekötô tetszôleges számú élbôl áll. Az "érdekes" eseteket a következô táblázatba foglaltuk össze.

r	h	n	q	t	típus
3	3	4	6	4	tetraéder**Hiba! A könyvjelző nem létezik.**
3	4	8	12	6	kocka
3	5	20	30	12	**Hiba! A könyvjelző nem létezik.**dodekaéder
4	3	6	12	8	**Hiba! A könyvjelző nem létezik.**oktaéder
5	3	12	30	20	**Hiba! A könyvjelző nem létezik.**ikozaéder

A szabályos testek elég régóta ismertek. Platón Timaeus c. művében felsorolja az összes szabályos poliédert. A következô ábrák a szabályos testeket és síkba rajzolt gráfjaikat mutatják.



.

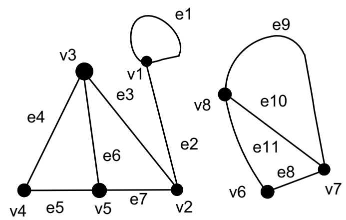
<u>**Mátrix reprezentációk**</u>

Az illeszkedési mátrix

Definíció: A $G(E,\varphi,V)$ irányítás nélküli gráf <u>*illeszkedési*</u> ill. <u>*incidencia mátrix*</u>**<u>*Hiba! A könyvjelző nem létezik.*</u>**<u>*a*</u> $A_{n,m}(a_{i,j})$, ahol $a_{i,j}$=1, ha a v_i csúcs illeszkedik az e_j. élre és 0 egyébként, ha az e_j. él hurokél a j. oszlop minden eleme 0.

$$
A=\begin{array}{c}
\\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8
\end{array}
\left(\begin{array}{ccccccc|cccc}
e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} & e_{11} \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1
\end{array}\right)
$$

A fenti definícióban a csúcsok számát n az élek számát m jelölte, azaz |V|=n és |E|=m. Hurokélekrôl nem ad használható információt a gráf illeszkedési mátrixa. Irányítatlan gráfok illeszkedési mátrixainak a sorai ill. az oszlopainak a permutálásával egymásba átvihetôk. Ha a G_1 és a G_2 gráfok izomorfak, akkor az illeszkedési mátrixaik A_1 ill. A_2 a soraik ill. oszlopaik alkalmas permutálásával egymásba átvihetôk. Ha a mátrixok egyformák, akkor nem tudjuk, hogy a megfelelô gráfok izomorfak e, mivel az illeszkedési mátrix nem ad felvilágosítást arról, hogy egy hurokél melyik csúcspontra illeszkedik és melyikre nem. A továbbiakban csak olyan irányítatlan gráfok illeszkedési mátrixairól beszélünk, melyeknek nincs hurokélük. A definíció alatti mátrix a szövegbe rajzolt gráf illeszkedési mátrixa. A mátrix 2 blokkból áll, mivel a gráfunk két komponense van, és elôször az elsô komponensbe tartozó csúcsokat ill. éleket adtuk meg. Általában is igaz, ha valamely G gráf k komponensbôl áll alkalmas módon indexelve a G csúcsait és oszlopait az illeszkedési



mátrixa k blokkból fog állni, azaz a mátrixa az alábbi alakú lesz $\mathbf{A}=\left(\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \hline . & . & \dots & . \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{A}_n \end{array}\right)$,

ahol az A_i a G mátrix i. komponensének az illeszkedési mátrixa.

Tétel: *Ha a G gráf rendje n és k komponensbôl áll és illeszkedési mátrixa A, akkor rg(A)=n-k, (a mátrixot a Z_2 test fölöttinek tekintjük (azaz mod(2) számolunk)).*

Bizonyítás: A bizonyítást a komponensek száma szerinti teljes indukcióval végezzük. Lényegében a tétel elôtt említett blokk felbontás miatt elegendô az állítást k=1 esetén belátni, mivel a "fôátlón" kívül mindenütt 0 áll és emiatt a blokkokból álló hipermátrix rangja megegyezik a fôátlóban álló blokk rangjainak összegével. Legyen G_1 elsô komponense G-nek és legyen csúcsainak száma n_1, s illeszkedési mátrixa A_1. Az A_1 mátrix rangja legfeljebb n_1-1 lehet. Valóban adjuk az A_1 mátrix minden sorát az A_1 mátrix utolsó sorához. Ekkor az utolsó sor minden eleme 0 lesz, mivel minden oszlopban 2 darab egyes van (egy él pontosan két csúcsra illeszkedik. Ha n_1-nél kevesebb s_1 sor összege is 0-t adna, például az $i_1,i_2,...,i_{s1}$, akkor $v_1,v_2,...,v_{s1}$ csúcsok egyikébôl sem vezetne él valamely másik a $v_1,v_2,...,v_{s1}$ pontoktól különbözô csúcspontba, ellentmondva annak, hogy G_1 összefüggô volt. Az elôbb mondottak megismételhetôk G bármely komponensére vonatkozólag, s figyelembe véve, hogy a speciális alakú A hipermátrixunk A_i blokkjainak rangjainak az összege magának a hipermátrixnak a rangjával egyezik meg, az állítást bebizonyítottuk.

Ha a G gráf A illeszkedési mátrixából komponensenként egy-egy sort elhagyunk, akkor G ún. **redukált incidencia mátrix**Hiba! A könyvjelző nem létezik.át kapjuk. Nem nehéz belátni, hogy *ha valamely kvadratikus (n-k)·(n-k)-as részmátrix determinánsa nem 0 ,akkor a részmátrix oszlopaihoz tartozó élek G minden komponensének kijelölik egy-egy feszítô fáját*.

Tétel: *Ha a G gráf $e_1,e_2,...,e_{k1}$ élei kört alkotnak, akkor az incidencia mátrix (a redukált incidencia mátrix) $e_1,e_2,...,e_{k1}$ által kijelölt oszlopai lineárisan függôk*.

Bizonyítás: A kijelölt oszlopoknak megfelelô élek közül kettô vagy 0 illeszkedik bármely csúcspontra, ezért a kijelölt oszlopok bármely sorában 2 vagy 0 darab 1-es áll , s ezek összege mod(2) valóban 0. Azaz a szóban forgó vektorok összege 0, s ez pontosan azt jelenti, hogy lineárisan függôk.

Definició: A $G(E,\varphi,V)$ irányított gráf illeszkedési mátrixának nevezem az $A_{n,m}(a_{i,j})$, ahol $a_{i,j}$=1, ha a v_i csúcsba fut be az e_j. él, $a_{i,j}$=-1 ha v_i csúcsból fut ki az e_j. él és 0 egyébként, ha az e_j. él hurokél a j. oszlop minden eleme 0.

Írányított gráf incidencia mátrixára is hasonló állítások igazolhatók, mint amilyeneket az írányítás nélküli gráfokra igazoltunk, de H.Poincare alábbi tétele rávílágít bizonyos eltérésekre.

Tétel: *Ha az A kvadratikus mátrix valamely G gráf incidencia mátrixának nem nulla determinánsú részmátrixa, akkor |det(A)|=1* .

Bizonyítás: Természetesen itt a valós test fölött számoltuk a determinánst. Legalább egy oszlop van a szóban forgó determinánsban, amelyben csak egy elem különbözik 0-tól. fejtsük ki e sor szerint, és az eggyel alacsonyabb rendű aldeterminánsra ismételjük meg az elôbbi okoskodást. Ezt az eljárást megismételve annyiszor, mint amennyi a determináns rendje végezetül a bizonyítandó állítás adódik.

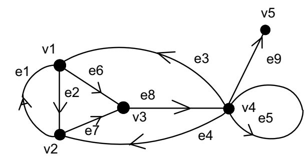
A körmátrix

A $K(k_{i,j})$ körmátrix azt mutatja, hogy a $G(E,\varphi,V)$ gráf élei mely körökben szerepelnek. Definició szerint $k_{i,j}=\begin{cases}1, & ha\ e_j\ éle\ a\ k_i\ körnek \\ 0, & ha\ ej\ nem\ éle\ a\ k_i\ körnek.\end{cases}$

Irányított G gráfhoz, ha minden körhöz már kijelöltünk egy-egy bejárási irányt, akkor az alábbi utasítással rendelünk körmátrix**Hiba! A könyvjelző nem létezik.**ot:

$$k_{i,j}=\begin{cases}1, & ha\ e_j\ éle\ a\ k_i\ körnek\ és\ irányuk\ egyezô \\ -1 & ha\ e_j\ éle\ a\ k_i\ körnek\ és\ irányuk\ különbözô \\ 0, & ha\ e_j\ nem\ éle\ a\ k_i\ körnek\end{cases}$$

. Felírjuk az alábbi irányított (irányítatlan) gráf K_1,(K_2) körmátrixát. Folytonos vonllal rajzoltuk a G gráf F feszitô fájának (**faváz**Hiba! A könyvjelző nem létezik.ának) éleit.



A körök ill. élek sorrendjét az alábbi szabály szerint adjuk meg. Kijelöljük a G gráf egy F favázát (ha G nem volt összefüggô, akkor minden egyes komponensének megadjuk egy favázát). Elôször az F fára vonatkozó e_i kötôéleket indexeljük (itt i-vel) és az általuk meghatározott köröket k_i-vel. Itt jegyezük meg, hogy a G gráf F favázára vonatkozóan az e él **kötôél**Hiba! A könyvjelző nem létezik., ha nem éle F-nek. A G gráf F feszítôfája és e kötôéle egyértelműen meghatározza G-nek egy k körét, mivel F maximális összefüggô kört nem tartalmazó részgráfja volt G-nek. Írányított gráfok elôbb említett **alapkör**Hiba! A könyvjelző nem létezik.eit F-re vonatkozó kötôéleinek megfelelôen írányítjuk

$$K_1 = \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 1&0&0&0&0&1&1&0&0\\ 0&1&0&0&0&1&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ \hline 1&1&0&0&1&0&0&0&0\\ 1&0&1&0&0&0&1&1&0\\ 1&0&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&1&0&0&0&1&1&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&0&1&1&0&1&1&0&0\\ 1&0&1&1&0&0&0&0&0\\ 0&1&1&1&0&0&0&0&0 \end{array}\right) \quad K_2 = \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 1&0&0&0&0&1&-1&0&0\\ 0&1&0&0&0&-1&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ \hline 1&1&0&0&1&0&0&0&0\\ -1&0&1&0&0&0&1&1&0\\ 1&0&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&1&0&0&0&1&1&0\\ 0&-1&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&0&1&-1&0&1&-1&0&0\\ 1&0&-1&1&0&0&0&0&0\\ 0&1&1&-1&0&0&0&0&0 \end{array}\right)$$

Írjuk fel a korábban lerajzolt G ill. G' irányított gráf illeszkedési A_1, ill. A_2 mátrixát is.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1&1&1&0&0&1&0&0&0\\ 1&1&0&1&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&1&1&0\\ 0&0&1&1&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1&1&-1&0&0&1&0&0&0\\ 1&-1&0&-1&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&-1&-1&1&0\\ 0&0&1&1&0&0&0&-1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&-1 \end{pmatrix},$$

Vegyük észre, hogy $A*K^T=N_{5*13}$ zérus mátrix és $A*B^T=N_{13*5}$ is.

Tétel: *Ha A G gráfnak az A illeszkedési illetve K körmátrixának oszlopai ugyanazon élsorozat szerint rendezettek, akkor $A*K^T=N_1$ és $K*A^T=N_2$ (mod(2))* (itt N_1 és N_2 is zérus mátrixokat jelöl).

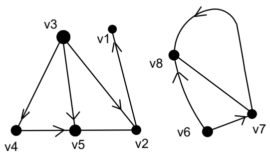
Bizonyítás: Az irányítás nélküli esetet tárgyaljuk és ott is csak az elsôt, mivel abból a második transzponálással megkapható. Ha az A a_i sorához tartozó v_i csúcs nem illeszkedik a k_j körre, akkor a szorzatmátrix n_{ij} eleme 0, mivel a v_i-re illeszkedô élek nem élei a k_j körnek.Ha az A a_i sorához tartozó v_i csúcs illeszkedik a k_j körre, akkor a szorzatmátrix n_{ij} eleme 0, mivel a v_i-re illeszkedô élek közül pontosan 2 éle a k_j körnek.

A csúcsmátrix

Irányított és irányítás nélküli gráfok esetén egyformán definiálhatjuk a csúcs- (vagy **szomszédossági) mátrix**ot. A mátrix a_{ij} eleme azoknak az éleknek a számával egyezik meg amelyek v_i-bôl futnak v_j-be, természetesen ha az e él irányítás nélküli és $\varphi(e) = (v_i, v_j) = (v_j, v_i)$, akkor úgy tekintjük, hogy e v_i-bôl megy v_j-be és fordítva is azaz e v_j-bôl megy v_i-be. Azaz n csúcspontú *irányítás nélküli G gráf csúcsmátrixa szimmetrikus* n*n-es kvadratikus mátrix. Ha adott A G(E,φ,V) gráf, és |V|=n, akkor csúcsmátrixa n*n-es valós elemű mátrix.

Definició: A G(E,φ,V) gráfnak $V_{n*n} = (a_{i,j})$ **csúcsmátrix**Hiba! A könyvjelző nem létezik.**a**, ha $a_{i,j} = \sum_{\varphi(e)=(v_i,v_j)} 1$.

Példa: Írjuk fel az alábbi irányított gráf szomszédossági (vagy **adjecencia mátrix**át).



$$\overset{\mathbf{r}}{V} = \begin{array}{c} v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5\\ v_6\\ v_7\\ v_8 \end{array} \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&2\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Érdemes megjegyezni, hogy a csúcsmátrix a hurokélekrôl is informál. Továbbá, ha a G gráf csúcsait A módon indexelve, csúcs mátrixa $\dot{V}_A$ ill. B módon indexelve $\dot{V}_B$, akkor a sorok és az oszlopok alkalmas cseréjével elérhetô, hogy az egyik mátrixot átvisszük a másikba. Mivel ugyanazokat a sorokat és oszlopokat kell felcserélni, ezért van olyan P permutáció mátrix, melyre $\dot{V}_A = P^{-1}\dot{V}_B P$. A fentiekben lényegében beláttuk a következô tételt.

Tétel: *Ha a G1 gráfnak a csúcsmátrixa A, és a G2 gráfnak csúcsmátrixa B, akkor a G1 és a G2 mátrixok izomorfiájának szükséges és elégséges feltétele az, hogy létezzék olyan P permutáció mátrix melyre teljesül, hogy $A = P^{-1}BP$.*

A **csúcsmátrix hatványai**ról nem nehéz belátni az alábbi tételt.

Tétel: *Legyen a G gráf csúcsmátrixa $\dot{V}_A$. $(\overset{\mathbf{r}}{V}_A)^n$-nek $v_{i,j}^n$ eleme megadja G v_i. és v_j. csúcsát összekötô irányított élsorozatoknak a számát*.

Bizonyítás: Teljes indukcióval bizonyítunk n=1 esetén az állítás adódik a csúcsmátrix definiciójából. Teggyük fel, hogy n=m-re igaz az állítás és igazoljuk (m+1)-re. Jelölje $v_{i,k}^{(m)}$ az indukciós feltevés szerint azon m hosszúságú irányított élsorozatok számát, melyek az i. csúcsot a k. csúccsal kötik össze. Továbbá jelölje $v_{k,j}^{(1)}$ az k. csúcsot a j. csúccsal összekötô élek számát. A $v_{i,k}^{(m)} \cdot v_{k,j}^{(1)}$ szorzat megadja az i. csúcsból a j. csúcsba vezetô olyan irányított m+1 hosszúságú élsorozatok számát, melyek a k. pontra illeszkednek (mikor is k, j szomszédja). k szerint összegezve a $v_{i,k}^{(m)} \cdot v_{k,j}^{(1)}$ szorzatokat, megkapjuk az i. csúcsból a j. csúcsba vezetô irányított élsorozatok számát, másrészrôl $v_{i,j}^{(m+1)} = \sum_{k=1}^{k=n} v_{i,k}^{(m)} \cdot v_{k,j}^{(1)}$, ami nem más mint a csúcsmátrix (m+1). hatványának i,j. eleme.

I.Megjegyzés: Ha valamilyen n-re $(\overset{\mathbf{r}}{V}_A)^n$=0, akkor a gráf nem tartalmazhat irányított kört.

II.Megjegyzés: A csúcsmátrix jól alkalmazható valamely A halmazon adott, ρ bináris reláció tulajdonságainak a jellemzésére. A $G_\rho(E,\varphi,V)$ gráfot a következô módon rendeljük az A halmazon adott ρ binér relációhoz:

(i) G csúcspontjai A elemei lesznek, azaz A=V,

(ii) $\left(e=(v_i,v_j)\in E\subseteq(A\otimes A)\right)\Leftrightarrow\left(v_i\rho v_j\right)$, más szóval v_i-t v_j-vel , akkor és csak akkor köti él össze, ha v_i ρ relációban áll v_j-vel. A ρ binér reláció, akkor és csak akkor reflexív, ha $G_\rho(E,\varphi,V)$ gráf $\underline{V'_A}$ csúcsmátrixának fôátlójában mindenütt 1 áll. A ρ binér reláció, akkor és csak akkor szimmetrikus, ha $G_\rho(E,\varphi,V)$ gráf $\underline{V'_A}$ csúcsmátrixa szimmetrikus.

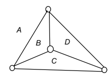
Gráfok színezése

A nóban soha ne feledjük kezdôi mivoltunkat. **Vekerdy Tamás:** A színészi hatás eszközei-Zeami mester művei szerint, Gondolat, 1988. , 221. o.

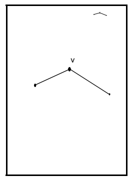
Gráfok síkba rajzolhatóságáról beszélve definiáltuk, a tartomány (illetve, "ország") fogalmát. Térképek színezésénél szokásos eljárás az, hogy szomszédos országokat különbözô színekkel színeznek ki. Két **ország**ot **szomszédos**nak szokás nevezni, ha a közös határuk hossza 0-nál nagyobb szám, azaz **van közös élük**. A G síkbeli gráfot **k színezhetô**nek mondjuk, ha G tartományait ki lehet festeni k színnel oly módon, hogy bármely két **szomszédos ország különbözô színű**. Ha az adott síkba rajzolható G gráf duálisa G', akkor a G k színnel való színezhetôsége, G'-re vonatkozólag azt jelenti, hogy G' csúcsait ki lehet színezni k színnel oly módon, hogy szomszédos csúcsok színei különbözôek. Azaz G' bármely élének két végpontja különbözô színű. A színezési probléma duális gráfra való átfogalmazása lehetôséget ad arra, hogy tetszôleges gráf színezhetôségérôl beszéljünk.

Definíció: A G gráf **kromatikus szám**Hiba! A könyvjelző nem létezik.a k, ha G csúcsai k színnel kiszínezhetôk, de kevesebbel (k-1)-el már nem.

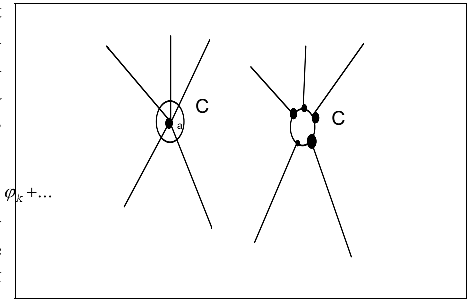
1840.-ben Möbius egy elôadásában, megfogalmazta a négyszínsejtést, mely azt állítja, hogy bármely síkbeli térkép kiszínezhetô 4 színnel. A sejtést De Morgan tette ismerté. Ô a problémát Franci Guthrietól vette át 1850 körül. Cayley 1879-ben jelentet meg egy dolgozatot a négyszínsejtésrôl a Proc. Royal Geographical Society elsô kötetében. 1890-ben Heawood egy Kempetôl származó hibás bizonyítást vizsgál és sikerül bebizonyítania, hogy síkgráfoknál öt szín elegendô a színezéshez. A négyszínsejtésre K. Appel és W. Haken 1976.-ban számítógép felhasználásával adtak bizonyítást. Bizonyításukban azonban azóta többen és többször is találtak hibát, de azok javíthatónak bizonyultak. A matematikusok egyrésze vitatja azt, hogy egy tételnek a számítógépes "bizonyítása" elfogadható e. A továbbiakban síkbeli gráfokról szeretnénk megmutatni, hogy öt színnel mindig ki színezhetôk. Azt belátni, hogy legalább 4 szín szükséges, könnyű. Például a tetraéder síkba rajzolt gráfja csak 4 színnel színezhetô ki.



Ha a G gráfunk v pontja másodfokú és v-re e1,e2 illeszkedett (φ(e1)=(u,v) és φ(e2)=(v,w), akkor v-t törölve és e1,e2 élek, helyett egy e' élt bevezetve (φ(e)=(u,w)) a színezés módja változatlan marad viszont az új gráfunkban eggyel kevesebb másodfokú pont lesz. Elérhetô , hogy olyan síkbeli gráfokkal foglalkozunk amelyeknek nincsen másodfokú csúcspontjai. Ha valamely pont foka 3-nál nagyobb, akkor a G gráfunkat átalakíthatjuk, oly módon, hogy a kiszínezhetôsége "ne változzék", de legfeljebb csak harmadfokú pontja legyen. Legyen az a



pont például az ábrának megfelelôen ötödfokú pont. Rajzoljunk körülötte egy C kört. S az a pont helyett vezessünk be 5 új pontot, melyek mindegyike már harmadfokú. Ha ez utóbbi gráf kiszínezhetô, akkor kiszínezhetô lesz az eredeti is. Elegendô azt látni, hogy ha az új gráf C körét ponttá zsugorítjuk, s a kört határoló tartományok színezését változatlanul, hagyjuk, akkor a régi gráfnak egy jó színezését kapjuk. Ezek szerint síkbeli gráfok színezhetôségét sikerült vissza vezetni arra az esetre, mikor is a gráf minden pontja harmadfokú. Az alábbiakban bebizonyítunk egy tételt, mely azt mondja, hogy bármely síkba rajzolható gráfnak van olyan tartománya, melyet 5 vagy ötnél kevesebb él határol. Ha sikerül megmutatnunk, hogy az öt vagy ötnél kevesebb éllel, határolt tartományok mindig elhagyhatók, anélkül, hogy a megváltozott gráf színezhetôsége változna, akkor végezetül is megoldottuk az ötszíntétel bizonyítását. A 38. oldalon szereplô (D1) formula szerint $2q = 2\cdot\varphi_2 + 3\cdot\varphi_3 + 4\cdot\varphi_4 + ... + k\cdot\varphi_k + ...$, ahol is q az élek számát, φ_i az "i" darab él által határolt tartományok számát jelölte. Ha a G gráfunk csúcsainak a számát "n" jelöli, akkor



$$(S2)\ 3n = 2\cdot\varphi_2 + 3\cdot\varphi_3 + 4\cdot\varphi_4 + ... + k\cdot\varphi_k + ...$$

, továbbá mivel t az összes tartomány számát jelölte $(S3)\ t = \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + ... + \varphi_k + ...$ Szorozzuk meg a D1-t 3-mal S2-t 2-vel és S3-t 6-tal, ekkor

$$6q = 6\cdot\varphi_2 + 9\cdot\varphi_3 + 12\cdot\varphi_4 + ... + 3k\cdot\varphi_k + ...$$

$$(S2)\ 6n = 4\cdot\varphi_2 + 6\cdot\varphi_3 + 8\cdot\varphi_4 + ... + 2k\cdot\varphi_k + ...$$

$(S3)\ 6t = 6\varphi_2 + 6\varphi_3 + 6\varphi_4 + ... + 6\varphi_k + ...$ kapjuk.

Ha az euler-formulát végigszorozzuk 6-tal, akkor $12 = 6n - 6q + 6t$ adódik, s a fenti képleteket behelyettesítve

$(S4)\ 12 = 4\varphi_2 + 3\varphi_3 + 2\varphi_4 + \varphi_5 - \varphi_7 - 2\varphi_8 - .... - (k-6)\varphi_k + ...$adódik.

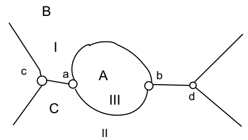
Az S4-es formula jobb oldalának pozitívnek kell lennie, ezért harmadfokú reguláris gráfnak van legalább egy olyan tartománya, melyet 5 vagy 5-nél kevesebb él határol. Azaz bebizonyítottuk a következô tételt.

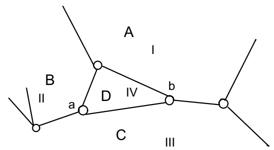
Tétel: _Ha a G gráf síkba rajzolható harmadfokú reguláris gráf, akkor van olyan tartománya, melyet legfeljebb 5 él határol._

Az ötszín-tétel bizonyításához rendre megmutatjuk, hogy ha a G gráfunknak kettô, három, négy vagy öt él által határolt tartományát "elhagyjuk", és az új G' gráf öt színnel jól színezhetô, akkor G is színezhetô legfeljebb ötszínnel. S mivel a G-bôl származtatott gráfok tartományainak a száma rendre csökkenni fog elôbb vagy utóbb eljutunk egy olyan $G^{(n)}$ gráfhoz melynek legfeljebb öt tartománya van, s akkor az már triviálisan színezhetô ötszínnel. Tehát az ötszíntétel bizonyításához elegendô megmutatni, hogy ha a G gráfnak "elhagyjuk"

egy "k" $(2 \le k \le 5)$ éllel határolt tartományát, s a nyert G' gráf legfeljebb 5 színnel jól színezhetô, akkor G is jól színezhetô 5 színnel.

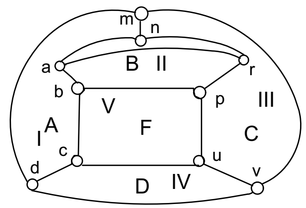
(I) Tegyük fel, a G harmadfokú reguláris síkba rajzolható gráfunknak van egy A tartománya, melyet az "a"és "b" csúcsokra illeszkedô 2 él határol. Legyen az "a" csúcs másik szomszédos csúcsa "c" ,és "b" szomszédja "d". Töröljük az "a" ill. "b" csúcsokat és a rájuk illeszkedô éleket. A "c" ill. "d" csúcsokat kössük össze egy új éllel Ha az A, a B és C tartományokkal volt határos, melyeket az I ill. II. színre festettünk, és A-t III-ra, akkor. Ha az új G' gráf B ill. C tartományának a színezése I ill. II. akkor az eredeti állapot helyreállítása esetén A színe újra lehet III. s nem kell változtatni a G' gráfnak esetleg meglévô többi tartományának a színezésén.



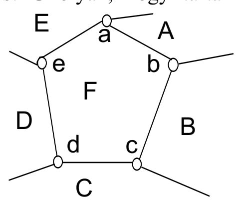


(II) Ha a G gráf a D háromszögtartományt tartalmazza, melyet az A, B, C tartományok határolnak, akkor az a,b csúcsokat törölve egyesítsük a D és a C tartományt, s jelöljük mondjuk D+C -vel. Az így nyert G' gráfnak, ha az A I-vel,B II-vel és D+C tartománya III-vel van színezve, akkor a C tartományt a visszaállítás után IV-vel színezzük.

(III) Tartalmazza most a G gráfunk az F tartományt, melyet négy oldal, és így négy tartomány határol, s jelölje azokat rendre A,B,C,D. A négy tartomány közül a szembe fekvôk közül feltétlenül van kettô olyan, melyek nem szomszédosak. Az ábránknak megfelelôen legyen az a kettô most B és D. Egyesítsük a B,F, és D tartományokat oly módon, hogy a "b","p","u","c" pontokat és a rájuk illeszkedô éleket töröljük. Valamint az "a"ill. d csúcsokat és az r ill. v csúcsokat egy-egy új éllel kötjük össze. Az ily módon nyert G' gráfnak kettôvel kevesebb tartománya van mint G-nek, és harmadfokú reguláris gráf. Ha G' színezésében A ill. C színe I ill. III., és B+F+D színe II, akkor a vissza állítás után F színe legyen IV és D színe II.



(IV) Legyen most G olyan, hogy tartalmazza az A,B,C,D,E tartományok által



határolt ötszögtartományt. Hasonló okoskodással mint az elôbb belátható, hogy van olyan két tartomány az A,B,C,D,E tartományok között melyek nem szomszédosak legyenek azok például B és D. Töröljük G-nek (b,c)-t ill. (e,d)-t összekötô éleit. Itt elôfordulhat, hogy az A,C,E tartományok szomszédosak és színezésükhöz három különbözô szín kell, mondjuk legyenek azok rendre I,II,III a negyedik IV szín D+F+B színezéséhez kell. S az eredeti gráf visszaállításánál a D és B tartományok színe lehet IV, de F színezéséhez már fel kell használni az V. ötödik színt. Ily módon bebizonyítottuk az alábbi tételt.

Tétel(ötszín-tétel): _Bármely síkba rajzolható sokszög gráf kiszínezhetô öt színnel._

Ramsey-féle problémák

Definició: Az n(m,k) számot **Ramsey-féle szám**Hiba! A könyvjelző nem létezik.nak nevezzük, ha rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal

(i) ha a G(E,φ,V) gráfnak a csúcspontjainak a száma $|V| = n \geq n(m,k)$, akkor vagy G -nek van egy m csúcspontú teljes részgráfja, vagy G komplementere tartalmaz egy k csúcspontú teljes gráfot,

(ii) van olyan G'(E',φ',V') gráf, melynek csúcspontjainak a száma $|V'| = n(m,k) - 1$ és G'-nek nincs m pontú teljes részgráfja, és a komplementerének sincs k pontú teljes részgráfja,

Az (ii) tulajdonsággal rendelkezô gráfokat **extrém gráf**Hiba! A könyvjelző nem létezik.oknak nevezzük. Szemléletesebb megfogalmazása a Ramsey-féle számoknak a következô: Ha az n(m,k) pontú teljes gráf éleit tetszés szerint pirosra vagy zöldre színezzük, akkor vagy egy piros színű teljes m gráfot vagy egy zöld színű k teljes gráfot kapunk, továbbá az n(m,k)-1 pontú teljes gráf éleit piros illetve zöld színnel lehet úgy színezni, hogy sem piros színű teljes m csúcspontú, sem zöld színű teljes k csúcspontú gráfot nem tartalmaz.

(RT1) Tétel: _Ha_ $\forall m,k \in N$ _,akkor_ $n(m,k) = n(k,m)$.

Bizonyítás: A színek felcserélésével adódik az állítás.

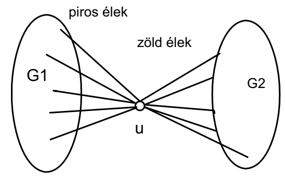
(RT2) Tétel: _Ha_ $\forall m,k \in N$ _,akkor_ $n(1,k) = n(m,1) = 1 \; n(2,k) = k,\;\; n(m,2) = m$.

Bizonyítás: Az egy pontból álló gráf nem létezô élét egyaránt tekinthetjük pirosnak ill. zöldnek is. Ha a k pontú teljes gráfnak minden színe zöld, akkor tartalmaz egy zöld színű teljes gráfot, ha csak egy éle is piros, akkor tartalmaz egy 2 pontú teljes piros gráfot. Ha az m pontú teljes gráfnak minden színe piros, akkor tartalmaz egy piros színű teljes gráfot, ha csak egy éle is zöld, akkor tartalmaz egy 2 pontú teljes zöld gráfot.

(RT3) Tétel: _Ha n(m-1,k) és (m,k-1) létezik, akkor n(m,k) is létezik és n(m,k)≤n(m-1,k)+n(m,k-1)._

Bizonyítás: Legyen adott a $K_{n(m-1,k)+n(m,k-1)}$ teljes gráf és élei tetszôlegesen színezve pirossal ill. zölddel, és legyen u valamely csúcspontja. Jelölje a G_1 az u-ból induló pirosélek és G_2 az u-ból induló zöld élek végpontjai által felfeszített részgráfjait $K_{n(m-1,k)+n(m,k-1)}$-nak. Legyen G_1 csúcspontjainak a száma n_1 és G_2 csúcspontjainak a száma n_2 , ekkor

$$n_1 + n_2 + 1 = n(m-1,k) + n(m,k-1)$$



és vagy (I) $n_1 \geq n(m-1,k)$ vagy (II) $n_2 \geq n(m,k-1)$. Az (I) esetben G_1 vagy egy m-1 pontú teljes piros gráfot tartalmaz és G_1-hez hozzávéve u-t és az u-ból G_1-be futó, piros éleket $K_{n(m-1,k)+n(m,k-1)}$-nek egy m pontú teljesen piros részgráfját kapjuk, ha G_1-ben k pontú teljes zöld részgráfunk volt, akkor az nyilván részgráfja $K_{n(m-1,k)+n(m,k-1)}$-nek is. Így az (I) esetben $K_{n(m-1,k)+n(m,k-1)}$-tartalmaz vagy egy m pontú teljes piros, vagy egy k pontú teljes zöld gráfot. A (II) esetben is teljesen hasonlóan belátható, hogy $K_{n(m-1,k)+n(m,k-1)}$-tartalmaz vagy egy m pontú teljes piros, vagy egy k pontú teljes zöld gráfot, s ezzel a bizonyítás kész.

(RT4) Tétel(Erdôs Pál és Szekeres György): _Ha_ $\forall m,k \in N$ _,akkor_

$$n(m,k) \leq \binom{m+k-2}{m-1}.$$

Bizonyítás: k szerinti teljes indukcióval bizonyítunk. k=1 esetén tetszôleges m-re n(m,1)=1 (R1) szerint, és mivel $1 \leq \binom{m+1-2}{m-1}$ ezért, ekkor az állítás igaz. Tételezzük fel, hogy az állításunk tetszôleges m-re igaz k=h-1 esetén és bizonyítsuk k=h-ra. Ez utóbbi állítást m szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk, m=1 esetén $1 \leq \binom{1+h-2}{1-1}$. Tegyük fel, hogy (m-1)-re már igaz az állítás , bizonyítsuk m-re. Ezek szerint tudjuk, hogy

(i) $n(m-1,h) \leq \binom{m+h-3}{m-2}$ és $n(m,h-1) \leq \binom{m+h-3}{m-1}$.

Az (RT2) szerint ekkor létezik n(m,k) és kisebb egyenlô, mint az _n(m-1,k)+n(m,k-1)_. Felhasználva az (i) becsléseket

$$n(m,k) \leq \binom{m+k-3}{m-2} + \binom{m+k-3}{m-1} = \frac{(m+k-3)!}{(k-1)!(m-2)!} + \frac{(m+k-3)!}{(k-2)!(m-1)!}$$

$$= (m+k-3)!\left(\frac{m-1}{(k-1)!(m-1)!} + \frac{k-1}{(k-1)!(m-1)!}\right) = \binom{m+k-2}{m-1}$$

megkapjuk a tétel állítását.

Generátorfüggvények, rekurzív sorozatok

Természetes számok halmazán gyakran értelmeznek olyan valós esetleg komplex értékű f(n) függvényeket, melyeknek az n helyen felvett értékei az 1,2,...,(n-1) helyeken felvett értékeitôl függnek. Például egy 10 éve fennálló vállalkozás alaptôkéje nyilván függ, az elôzô években az alaptôke növelésére esetleg csökkentésére fordított összegek nagyságától, bár ezen összefüggések kiváltképp napjainkban eléggé ködösek lehetnek. Mi itt csupán olyan rekurzív összefüggésekkel fogunk foglakozni, melyet matematikán belül lineárisan rekurzív sorozatoknak szokás nevezni.

Definíció: Az

(RKI) $u_{n+k} = a_{k-1}u_{n+(k-1)} + a_{k-2}u_{n+(k-2)} + \ldots + a_1 u_{n+1} + a_0 u_n$

(az a_i-k valós vagy komplex konstansok) képlettel és az $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{k-2}, u_{k-1}$ kezdô értékekkel adott sorozatot **k-ad rendű lineárisan rekurzív sorozat**Hiba! A könyvjelző nem létezik.**nak** nevezzük.

Másodrendű lineáris rekurzív sorozatok körébôl máig a legnépszerűbb, s valószínűleg a legrégibb példa a Fibonacci-sorozat

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1,\ u_2 = 1,\ u_3 = 2,\ u_4 = 3,\ u_5 = 8,\ \ldots,\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Leonardo Fibonacci (eredeti neve Leonardo Pisano,(pisai Leonardo)) Liber Abaki (könyv az abakuszról) c. művében jelenik meg elôször. A Fibonacci-sorozat a következô problémából keletkezett: Hány pár nyúl származhat egyetlen pártól, ha

(i) minden pár havonta egy párt nemz, amely a második hónaptól kezdve lesz nemzôképes és

(ii) mindegyik nyúl halhatatlan?

Definíció: Az (RKI) **k-ad rendű lineáris rekurzív sorozat karakterisztikus polinom**Hiba! A könyvjelző nem létezik.**jának** nevezzük a következô polinomot

(RK2) $f(x) = x^k - a_{k-1}x^{k-1} - a_{k-2}x^{k-2} - \ldots - a_2 x^2 - a_1 x - a_0$.

Ha az (RK2) gyökei $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ páronként különbözôek, akkor a sorozat n. tagja felírható,

(RK3) $u_n = c_k\alpha_k^n + c_{k-1}\alpha_{k-1}^n + \ldots + c_2\alpha_2^n + c_1\alpha_1^n$ alakban.

Ha azonban csak m<n gyökünk van, s az i. gyök multiplicitása s_i, akkor sorozatunk n. tagja az alábbi alakban írható:

(RK4) $u_n = \sum_{i=0}^{i=m} \alpha_i^n (c_{i,0} + c_{i,1}n + \ldots + c_{i,s_i-1}n^{s_i-2} + c_{i,s_i}n^{s_i-1})$.

Látható, hogy a sorozat általános alakja teljesen analóg az állandó együtthatójú lineáris differenciál egyenletek megoldásával.

Tétel: *Ha az* $u_{n+k} = a_{k-1}u_{n+(k-1)} + a_{k-2}u_{n+(k-2)} + \ldots + a_1 u_{n+1} + a_0 u_n$ *összefüggést a* $Z_1(z_{1,1}, z_{1,2}, \ldots, z_{1,j}, \ldots), Z_2(z_{2,1}, z_{2,2}, \ldots, z_{2,j}, \ldots), \ldots, Z_k(z_{k,1}, z_{k,2}, \ldots, z_{k,j}, \ldots)$ *sorozatok kielégítik, akkor tetszôleges* $c_1, c_2, \ldots, c_k$ *konstansok esetén kielégíti, a* $V(v_1, v_2, \ldots, v_j, \ldots)$ *sorozat is, ahol* $v_j = c_1 z_{1,j} + c_2 z_{2,j} + \ldots + c_k z_{k,j}$, $(j = 0,1,2,\ldots,n,\ldots)$.

Bizonyítás: A tétel feltételei szerint bármely $i = 1,2,\ldots,k$ és $(n = k, k+1, k+2, \ldots, h, ..)$ esetén teljesülnek az alábbi azonosságok,

(RK5) $z_{i,n+k} = a_{k-1}z_{i,n+(k-1)} + a_{k-2}z_{i,n+(k-2)} + \ldots + a_1 z_{i,n+1} + a_0 z_{i,n}$.

Szorozzuk meg az i.-t c_i-vel majd adjuk össze ôket , ekkor felhasználva azt, hogy $v_j = c_1 z_{1,j} + c_2 z_{2,j} + \ldots + c_k z_{k,j}$ adódik, hogy

$$v_{n+k} = a_{k-1}v_{n+(k-1)} + a_{k-2}v_{n+(k-2)} + \ldots + a_1 v_{n+1} + a_0 v_n$$

s ez az amit bizonyítani kellett. Nem okoz különösebb nehézséget megmutatni, hogy ha az (RK1) rekurzív összefüggés karakterisztikus polinomjának α_i gyöke, akkor $z_{i,j} = \alpha_i^j$ $(j = 0,1,2,\ldots,n,\ldots)$ sorozat megoldása (RK1)-nek. Ha α_i gyöke (RK2)-nek , akkor $\alpha_i^k = a_{k-1}\alpha_i^{k-1} + a_{k-2}\alpha_i^{k-2} + \ldots + a_2\alpha_i^2 + a_1\alpha_i + a_0$ azonosságot végig szorozhatjuk, α_i^n-nel és látható, hogy az (RK1) teljesül.

Példa: A Fibonacci-sorozat karakterisztikus egyenlete $x^2 = x + 1$, gyökei $\alpha_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Mivel u_n-t $u_n = c_1\alpha_1^n + c_2\alpha_2^n$ alakban keressük írjunk be n helyére n=0 és n=1-t, c_1, c_2-re kapjuk az alábbi lineáris egyenletrendszert

$$\begin{aligned} c_1 \quad + c_2 \quad &= 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{2}(c_1 \quad + c_2) \quad &= 1 \end{aligned}$$

, melynek megoldása $c_1 = -c_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$. A Fibonacci-sorozat n. elemét ezek szerint írhatjuk az

(RK6) $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

alakban, mely távolról sem tűnik triviálisnak. Megemlítjük, hogy külön folyóirata van a Fibonacci-féle számoknak. Nemzetközileg is elismert, szép eredmények, kapcsolódnak Kiss Péter és Pethô Atilla nevéhez, mindketten a Gyôry Kálmán által létrehozott debreceni-számelméleti-iskola jeles személyiségei.

A **generátor függvény**Hiba! A könyvjelző nem létezik. elnevezést többféle értelemben is használják a matematika különbözô területein. Mi itt kétféle lehetséges értelmezést fogunk megemlíteni. Elôször az úgy nevezett **partíciós problémák**Hiba! A könyvjelző nem létezik.ra vonatkozó generátor függvényekrôl beszélünk. Legyenek adottak az $n_1, n_2, \ldots, n_k$ pozitív egészek. Kérdezzük, hogy az m szám hányféleképpen állítható elô az $n_1, n_2, \ldots, n_k$-k összegeiként oly módon, hogy bármely $n_1, n_2, \ldots, n_k$ számot többször is felhasználhatunk és a sorrend nem számít. A partíciós problémának az elôbbi változatát szokás **pénzváltási problémá**Hiba! A könyvjelző nem létezik.**nak** is nevezni. Vizsgáljuk meg, például, hogy valamely számot, hányféleképpen lehet elôállítani az 1,2,3,5 számok összegeként. Tekintsük a következô függvényt

$$f(x)=\left(1+x^1+x^2+\ldots+x^n+\ldots\right)\cdot\left(1+x^2+x^4+\ldots+x^{2n}+\ldots\right)$$

$$\text{(GK1)}\quad \cdot\left(1+x^3+x^6+\ldots+x^{3n}+\ldots\right)\cdot\left(1+x^5+x^{10}+\ldots+x^{5n}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{(1-x)\left(1-x^2\right)\left(1-x^3\right)\left(1-x^5\right)}$$

Az f(x) függvény lesz ez esetben a generátor függvény. Nem vizsgáljuk, hogy az f(x) elôállításában szereplô hatványsorok konvergensek e vagy sem. Ha az f(x)-t hatványsorba fejtjük

$$\text{(GK2)}\quad f(x)=\frac{1}{(1-x)\left(1-x^2\right)\left(1-x^3\right)\left(1-x^5\right)}=A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_mx^m+..$$

,akkor az A_m együttható fogja megmutatni, hogy m-t, hányféleképpen lehet felírni az 1,2,3,5 számok összegeiként. Az A_m együtthatók meghatározására különbözô módszerek léteznek. Egy lehet a következô: A (GK2) nevezôjében a szorzásokat elvégezve adódik

$$\text{(GK3)}\quad f(x)=\frac{1}{\left(1-x-x^2+x^4+x^7-x^9-x^{10}+x^{11}\right)}=A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_mx^m+\ldots$$

A nevezôvel végig szorozva, s figyelembe véve, hogy x^m együtthatója 0 a baloldalon, ha m>0 az A_m együtthatókra az alábbi rekurzív összefüggést nyerjük.

$$\text{(GK4)}\quad A_m=A_{m-1}+A_{m-2}-A_{m-4}-A_{m-7}+A_{m-9}+A_{m-10}-A_{m-11}$$

A kezdeti értékekre, ha m<0, akkor A_m =0 és ha m=0, akkor A_0=1.

Más módon is meghatározhatjuk a (GK3) formula jobb oldalán álló hatványsor együtthatóit. A (GK4) formula jobb oldalán végezzük, el az osztást!

$$\text{(GK4)}\quad f(x)=\frac{1}{\left(1-x-x^2+x^4+x^7-x^9-x^{10}+x^{11}\right)}$$

$$1:\left(1-x-x^2+x^4+x^7-x^9-x^{10}+x^{11}\right)=1+x+2x^2+3x^3+4x^4+6x^5+\ldots$$

$$x+x^2-x^4-x^7+x^9+x^{10}-x^{11}$$

$$2x^2+x^3-x^4-x^5-x^7-x^8+x^9+2x^{10}-x^{12}$$

$$3x^3+x^4-x^5-2x^6-x^7-x^8-x^9+2x^{10}+2x^{11}+x^{12}-2x^{13}$$

$$4x^4+2x^5-2x^6-4x^7-x^8-x^9-x^{10}+2x^{11}+4x^{12}+x^{13}-3x^{14}$$

$$6x^5+2x^6-4x^7-5x^8-x^9-x^{10}-2x^{11}+4x^{12}+5x^{13}+x^{14}-4x^{15}$$

Az alábbi definícióban egy sorozathoz más módon rendelünk generátor függvényt.

Definíció: Adott A=($a_0,a_1,\ldots,a_n$,..) sorozat **generátorfüggvénye** az $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_mx^m+..$ hatványsor.

Az esetek túlnyomó többségében itt sem érdekes, hogy a definícióban szereplô hatványsor milyen intervallumon konvergens.

Érdemes megvizsgálni a generátorfüggvények segítségével a Fibonacci-sorozatot. Legyen

$$\text{(GK5)}\quad G(x)=u_0+u_1x+u_2x^2+\ldots+u_nx^n+..$$

a Fibonacci-sorozat generátorfüggvénye az elôzô definíció értelmében, s szorozzuk meg x-xel, majd x^2-tel, nyerjük az alábbi képleteket:

$$\text{(GK6)}\quad xG(x)=u_0x+u_1x^2+u_2x^3+\ldots+u_nx^{n+1}+..$$

$$\text{(GK7)}\quad x^2G(x)=u_0x^2+u_1x^3+u_2x^4+\ldots+u_nx^{n+2}+\ldots$$

Ha a (GK5)-bôl rendre levonjuk (GK6)-t és (GK7)-t adódik, hogy:

$$\text{(GK8)}\quad \left(1-x-x^2\right)G(x)=u_0+(u_1-u_0)x+(u_2-u_1-u_0)x^2+\ldots+(u_n-u_{n-1}-u_{n-2})x^n+\ldots$$

=x.

A (GK8)-ból G(x) zárt alakja egyszerű osztással megkapható

$$\text{(GK9)}\quad G(x)=\frac{x}{1-x-x^2}.$$

A G(x) jobboldalán álló racionális-tört-függvényt bontsuk parciális törtek összegére a valós test felett. Figyelembe véve, hogy a nevezôben szereplô polinom gyökei $\frac{1}{2}\left(-1\pm\sqrt{5}\right)$:

$$\text{(GK10)}\quad G(x)=\frac{x}{1-x-x^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\alpha x}+\frac{1}{1-\overline{\alpha}x}\right),$$

ahol $\overline{\alpha}=1-\alpha=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)$. A (GK10) jobb oldalán szereplô $\frac{1}{1-\alpha x}$, $\frac{1}{1-\overline{\alpha}x}$ függvények az $1+\alpha\ x+\alpha^2x^2+\ldots+\alpha^nx^n+..$, $1+\overline{\alpha}\ x+\overline{\alpha}^2x^2+\ldots+\overline{\alpha}^nx^n+..$ mértani sorokkal egyeznek meg. Figyelembe véve, hogy abszolút konvergensek alkalmas módon átrendezve, megkapjuk, hogy a Fibonacci-sorozat tagjai írhatók $u_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^n-\overline{\alpha}^n\right)$ alakban összhangban a korábbi eredménnyel (RK6)-tal. Megjegyezzük, hogy a Fibonacci-sorozatnak ezt az alakját a fenti levezetési technika használatával L. de Moivre már 1730.-ban közölte.

Feladatok

1. Jelöljük f_S(n)-nel azt a legnagyobb egész számot, amelyre fennáll a következô: bárhogyan is színezzük a teljes n-gráf éleit az s számú színek valamelyikével, mindig található benne csupa azonos színű élbôl álló legalább f_s(n) pontú összefüggô részgráf. Mutassa meg, hogy bármely n-re

$$f_2(n)=n.$$

2. Bizonyítsa be, hogy ha n pozitív páros szám, akkor

$$f_{n-1}(n)=2.$$

3. m számú sakkozót két csapatra osztunk. Két sakkozó, akkor és csak akkor fog játszani egymással egy partit, ha különbözô csapatban vannak. Hogyan kell ôket szétosztani, hogy a lehetô legtöbb mérkôzést játsszák.

4.Mutassa meg, hogy a tóruszon van olyan térkép melynek kiszínezéséhez hét szín kell.

5. Mutassa meg, hogy a Môbius szalagon van olyan térkép, mely nem színezhetô ki hatnál kevesebb színnel.

6. Bizonyítsa be, hogy az a térkép, amely véges számú kör megrajzolásával keletkezik a síkban, mindig ki színezhetô két színnel.

7. Bizonyítsa be, hogy egyenesek által meghatározott síkbeli térkép színezéséhez mindig elegendô két szín.

8. Mutassa meg, hogy ha egy térkép minden egyes csúcsának a foka legalább 3, akkor az élek és a csúcsok között fennáll a következô egyenlôtlenség "$6+q\leq 3n$" (,ahol q az élek száma és n a csúcsoké).

9. Írja fel az 5 csúcsú teljes gráf csúcs, ill. illeszkedési mátrixát!

10. Írja fel a $K_{3,3}$ gráf körmátrixát.

11. Ismerve az A=($a_0, a_1, \ldots, a_n, ..$) sorozat f(x) generátor függvényét adja meg az A'=($0, 0, \ldots, 0_k, a_0, a_1, \ldots, a_n, ..$) generátor függvényét.

12. Legyen az A=($a_0, a_1, \ldots, a_n, ..$) sorozat generátorfüggvénye f(x) és B=($b_0, b_1, \ldots, b_n, ..$) sorozaté g(x), legyen továbbá adott a C=($\alpha a_0 + \beta b_0, \alpha a_1 + \beta b_1, \ldots, \alpha a_n + \beta b_n, ..$) sorozat fix valós α,β-val. Mutassa meg, hogy a C sorozat h(x) generátor függvényére teljesül, hogy $h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$.

13. Adjon meg olyan "kevés elemű" sorozatot, hogy bármely egész szám elôálljon legfeljebb h darab sorozatbeli elem összegeként. (Ez a posta-bélyegek-problémája.)

14. Mutassa meg, hogy bármely pozitív egész szám elôáll a Fibonacci-sorozat különbözô tagjainak összegeként.