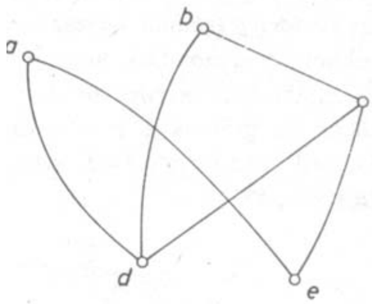
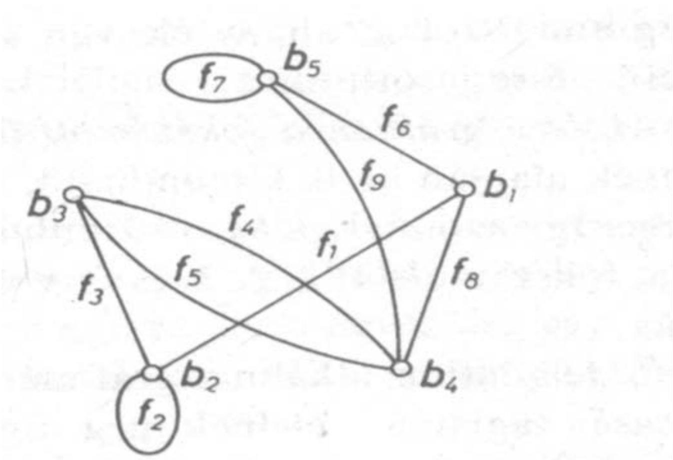
Alapfogalmak

Mi a gráf? Tekintsük pl. egy ***n*** csapatból álló labdarúgó bajnokság állását. A már lejátszott és még le nem játszott mérkőzésekről szeretnénk áttekinthető képet kapni. Jelöljük a csapatokat körökkel (és írjunk melléjük egy betűt vagy egy számot-ezek azonosítják a csapatokat). Ha két csapat már játszott egymással, akkor kössük össze az őket jelképező pontokat egy vonallal. Amennyiben azt is szeretnénk ábrázolni, hogy két csapat közül melyik volt a vendég, akkor lássuk el egy nyíllal az őket összekötő vonalat (pl. a nyíl mutasson a vendégtől a hazai csapat felé). Az így kapott, pontokból és vonalakból álló ábrát **gráf**nak nevezzük. A köröket a gráf **pont**jainak, a köröket összekötő vonalakat a gráf **él**einek nevezzük.



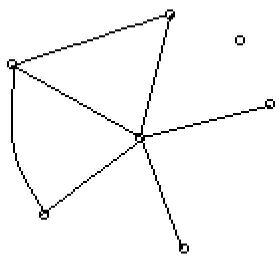
1. ábra

A gráf egy adott pontjából kiinduló élek számát a pont **fokszám**ának nevezzük. Az 1. ábrán például grad(d)=3, grad(b)=2. Ha a gráfban van két olyan pont, amelyet több él is összeköt, akkor azt mondjuk, hogy a gráf tartalmaz **többszörös élek**et. Ha egy gráfban az “a” pontból úgy jutunk el egy “b” pontba, hogy közben bármely pontot legfeljebb egyszer érintünk, akkor azt mondjuk, hogy **úton** haladtunk. Az 1. ábrán ilyen út például az a-d-c-b vagy a-d-b vagy a-e-c-b. Ha egy út kezdő és végpontja azonos, akkor **kör**ről beszélünk (a fenti ábrán például a-d-c-e-a vagy d-c-b-d egy-egy kör). Egy **út vagy kör hosszán** éleinek számát értjük. Az olyan élt, amelynek mindkét vége ugyanaz a pont, **hurokél**nek nevezzük. Egy gráfban két pontot **szomszédos**nak nevezünk, ha él köti össze őket. **Két élt szomszédosnak** nevezünk, ha egyik végpontjuk közös. A 2. ábrán például b_2 és b_3 valamint b_1 és b_5 szomszédos pontok, ugyanakkor f_6 és f_9 valamint f_3 és f_4 szomszédos élek.

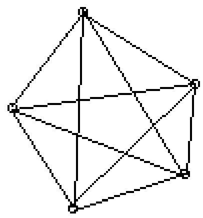


2. ábra

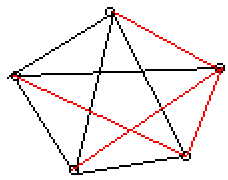
A 2. ábrán hurokél az f_2 illetve f_7. Ugyanakkor többszörös él például a b_3 és b_4 pontokat összekötő f_4 és f_5 élek. Egy gráfot **egyszerű**nek nevezünk, ha sem hurokélt, sem pedig többszörös éleket nem tartalmaz. Az olyan egyszerű gráfot, amelyben bármely két különböző pontot egy és csak egy él köt össze, **teljes gráf**nak nevezzük. Ha egy gráfban bármely két pont úttal elérhető, akkor a gráfot **összefüggő**nek nevezzük. Egy gráf **komplementer**én azt a gráfot értjük, amelynek az eredeti gráffal való egyesítése teljes gráfot ad.



egyszerű gráf

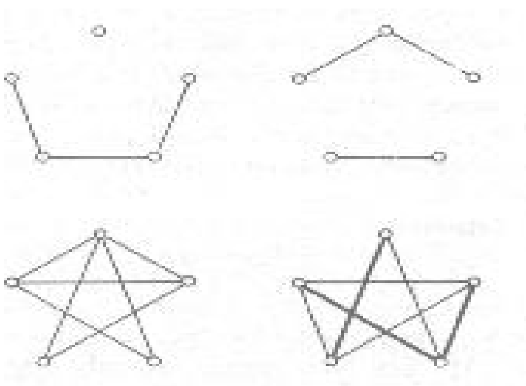


teljes gráf



gráf (fekete) és komplementere (piros)

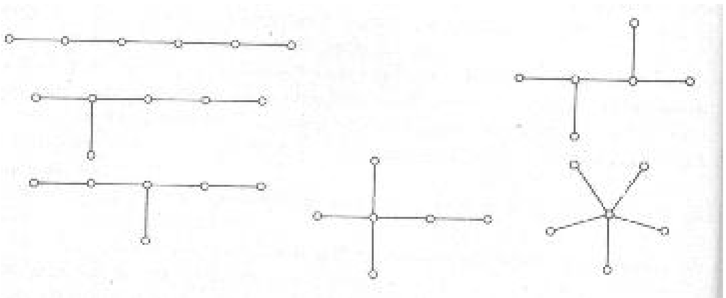
Ha egy gráf bizonyos éleit és/vagy pontjait - a pontokat a hozzá illeszkedő élekkel együtt - töröljük, akkor ismét egy gráfot kapunk. Az így kapott gráfot az eredeti gráf **részgráf**jának nevezzük. A G gráf azon részgráfját, amely nem azonos G-vel, a G gráf egy **valódi részgráf**jának nevezzük. A G **gráf** egy **komponens**én G egy olyan részgráfját értjük, amely összefüggő, de nem valódi részgráfja G egyetlen összefüggő részgráfjának sem.



3/1. ábra komponensekről.

A 3/1. ábrán látható gráf 6 komponensből áll, ebből 4 darab van a felső sorban és 2 darab az alsó sorban.

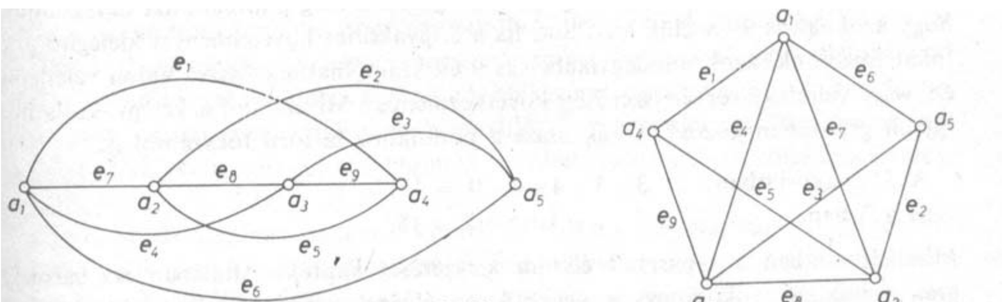
A körmentes, összefüggő gráfot **fagráf**nak nevezzük. A 3/2. ábrán látható gráfok (6 darab gráf) mindegyike fagráf.



3/2. ábra

A gráfokat G betűvel (esetleg indexelve, ha többről van szó) jelöljük általában.

Két gráfot (G_1 és G_2) **izomorf**nak nevezünk, ha az egyik gráf pontjai és élei kölcsönösen egyértelműen és illeszkedéstartóan megfeleltethetők a másik gráf pontjainak illetve éleinek. A 4. ábrán látható két gráf izomorf.



4. ábra

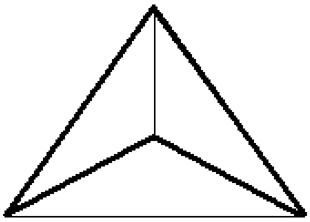
Néhány egyszerű és alapvető tétel a gráfokkal kapcsolatban:

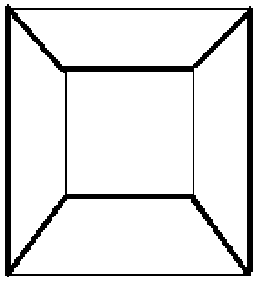
1. tétel: Minden gráfban a fokszámok összege az élek számának kétszeresével egyenlő.
Bizonyítás: mivel minden él két pontot köt össze, ezért a fokszámok összege valóban az élek számának kétszeresével egyenlő.
2. tétel: **Minden egyszerű gráfban a páratlan fokú pontok száma páros.**
Bizonyítás: : mivel a pontok fokszámának összege egyenlő az élek számának kétszeresével, ezért ez a szám páros. Ha ebből az összegből levonjuk a páros fokú pontok fokszám összegét, a különbség továbbra is páros lesz. De ez a különbség éppen a páratlan fokú pontok fokszám összegével egyenlő. Ezzel beláttuk az állítást.
3. tétel: Az n-pontú teljes gráf éleinek száma n*(n-1)/2.
Bizonyítás: Vegyük a gráf egy tetszőleges pontját. Ebből n-1 darab él indul ki, mivel a gráf teljes. Mivel a gráfnak n pontja van, ezért első megközelítésben n*(n-1) él adódik. De ebben a meggondolásban minden élt pontosan kétszer veszünk számításba, így valójában az n-pontú teljes gráf éleinek a száma: n*(n-1)/2.
4. tétel: Ha egy gráfban minden pont foka legalább 2, akkor a gráfban van kör.
Bizonyítás: Induljunk el a szóban forgó gráf egy tetszőleges pontjából és haladjunk a gráf élein. Mivel minden pont foka legalább kettő, így bármelyik új pontba jutva, még be nem járt élen haladhatunk tovább. Csak akkor akadhatunk meg, ha már érintett pontba jutunk. Ekkor azonban a gráf egy körét is bejártuk. Ezzel beláttuk az állítást.
5. tétel: Ha egy n-pontú gráfnak legalább n éle van, akkor van a gráfban kör.
Bizonyítás: az állítást n-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk. Az állítás n=1-re nyilván igaz. Tegyük fel, hogy valamely n>= 1-re minden n-pontú és legalább n-élű gráfban van kör. Belátjuk, hogy akkor minden n+1-pontú és legalább n+1-élű gráfban is van kör. Legyen G egy n+1-pontú gráf, amelynek legalább n+1 éle van. Ha G-nek van elsőfokú pontja, akkor töröljük ezt a pontot, a hozzá tartozó éllel együtt. Az így kapott gráfnak n pontja van és legalább n éle, így az indukciós feltevés szerint tartalmaz kört. Ezt a kört viszont G is tartalmazza. Ha G-nek nincsen elsőfokú pontja, akkor minden pontjának foka legalább 2, így a 4. tétel szerint van benne kör. Ezzel az állítást beláttuk.

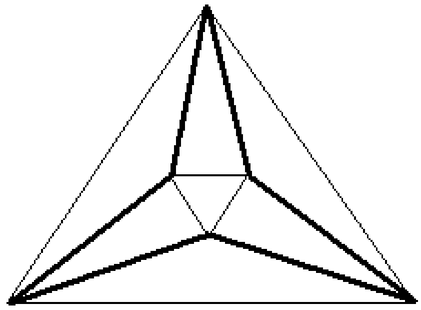
Euler-vonalnak (illetve útnak) nevezünk a gráfban egy utat, ha a gráf minden élén pontosan egyszer halad keresztül.

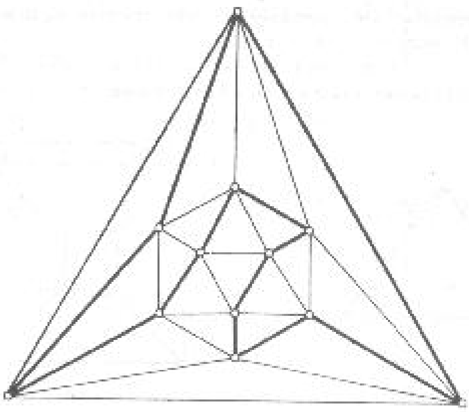
Hamilton-körnek nevezzük a gráf egy olyan körét, amely a gráf minden pontján pontosan egyszer halad keresztül.

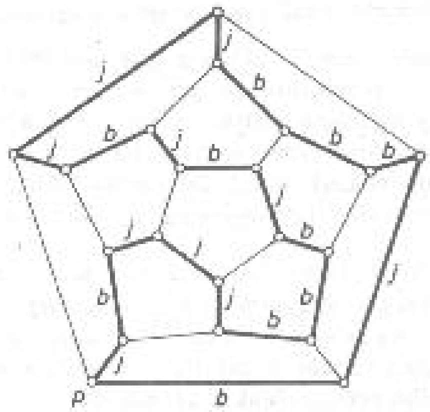
Rajzoljuk meg a tetraéder, a hexaéder, az oktaéder, az ikozaéder és a dodekaéder kiterített élvázának egy-egy Hamilton-körét! A dodekaéder esetén j (jobb) és b (bal) betűvel vannak jelölve az élek aszerint, hogy az élen haladva és egy csúcshoz érve, onnan balra vagy jobbra kell folytatni a bejárást. A gráf pontjainak bejárását a "p" pontból kezdjük. Egy ilyen bejárást a "bjbbbjjjbjbjbbbjjjbj" jelsorozattal lehet jellemezni.







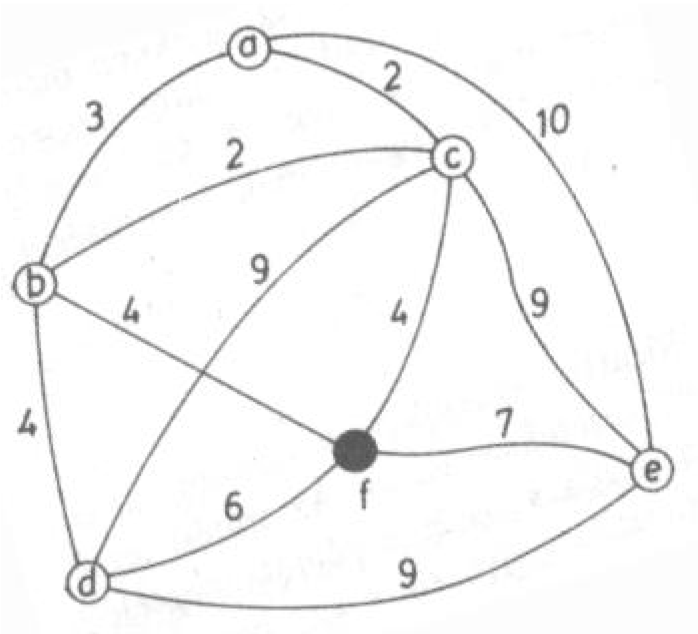



j
j
b
j
b
j
b
b
b
j
j
b
j
b
b
j
j
b
j
p
b

Útkeresés, gazdaságossági számítások

1. Körmentes vízhálózat gazdaságos építése:

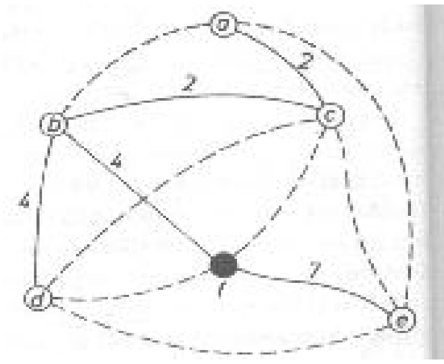
Tegyük fel, hogy falvaknak egy rendszerét vízvezeték-hálózatba akarjuk bekapcsolni. Az építési tervet úgy kell elkészíteni, hogy megvalósítása gazdaságos és a célnak megfelelő legyen. Egy térképvázlatot készítünk. A falvaknak pontokat feleltetünk meg. Ha két falu között van vezeték, akkor az azokat jelképező pontokat összekötjük egy éllel. Így kapjuk a feladatnak megfelelő gráfot. A víznek minden faluba el kell jutnia, tehát a gráfnak összefüggőnek kell lennie. A gazdaságosság megköveteli, hogy feleslegesen ne építsünk vezetéket két falu között. Ez megköveteli, hogy a gráfunk ne tartalmazzon kört! A tervrajznak megfelelő gráf tehát fagráf kell legyen, mégpedig azok közül is a legolcsóbb. A gráfok nyelvén megfogalmazva a feladatot: vegyünk fel egy olyan gráfot, melynek pontjai a falvakat, élei a falupárok között szóba jöhető vezetékeket jelölik. Számítsuk ki a falupárokat összekötő vezetékek építési költségeit és írjuk rá a megfelelő élekre. Két falunak megfelelő pontot csak egy éllel kötünk össze, mégpedig a legolcsóbb vezetéknek megfelelően. Igy az eredeti gráf egy részgráfját kapjuk, mégpedig a G gráf egy minimális építési költségű F favázát (gazdaságos favázát). Az 1. ábrán látható gráf egy építést megelőző térképvázlat. A fekete "f" pont a forrást jelöli. Ebből az "a", "b", "c", "d" és "e" pontokkal jelölt falvakat kell vízzel ellátni. Vezetékek a gráf élei mentén építhetők. Az élekre rá vannak írva a vezetékek építési költségei.



1. ábra

<u>1. módszer:</u> Az összefüggő G gráf egy gazdaságos favázát keressük. Töröljünk G-nek körökben szereplő élei közül egy legnagyobb költségűt. Az így kapott G_1 grág G-nek egy részgráfja és G1 összefüggő és G-nek minden pontját tartalmazza. Ezután töröljük G_1 köreiben szereplő élek közül egy legnagyobb költségűt, majd ismételjük tovább ezt az eljárást. Ha a törlési utasítás már nem hajtható végre, akkor az utolsónak kapott F gráfnak már nincs köre és F a G gráfnak részgráfja továbbá összefüggő is, azaz F egy fagráf.

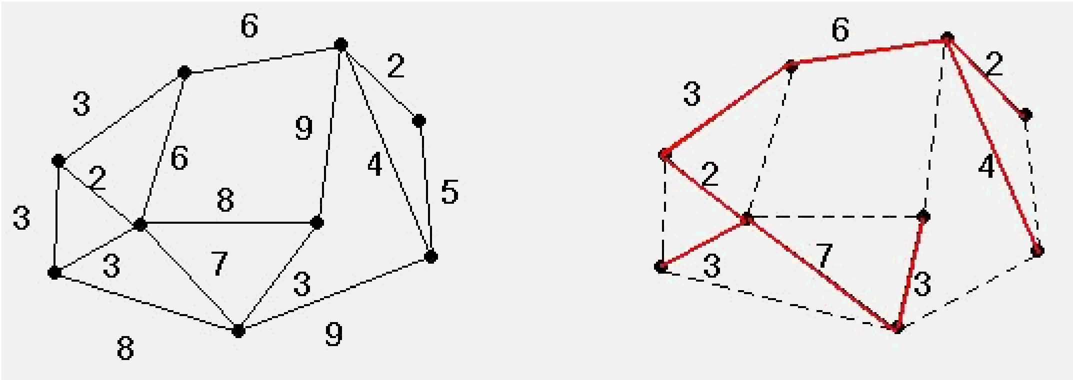
Az 1. ábrán látható gráf esetén először vegyük az ***a-c-e-a*** kört. Ebben a legnagyobb élű a 10-es, ezt töröljük (az ábrán szaggatott vonallal jelöljük a továbbiakban). A ***f-e-c-f*** *körben a 9-es élt kell törölnünk az eljárás szerint. A* ***d-f-c-d*** *körben szintén a 9-es élt kell törölnünk. A* ***d-f-e-d*** *körben a 9-es élt kell törölnünk. A* ***d-f-b-d*** *körben a d-f közötti 6 hosszúságú élt, az* ***f-c-b-f*** *körben az f-c közötti 4 hosszúságú élt, valamint a* ***b-c-a-b*** *körben a b-a közötti 3 hosszúságú élt kell törölni. Ezeket az éleket mind törölve kapjuk a 2. ábrát, amelyen a folytonos vonallal jelölt (és számmal ellátott!) F gráf lesz a G gráf egy gazdaságos faváza. Ebben az élekre írt szakaszok költségeinek összege: 19 egység.*



2. ábra

Bebizonyítható, hogy ez az F fagráf a G gráfnak gazdaságos fagráfja.

<u>2. módszer:</u> Jelöljük ki az összefüggő gráf egy legkisebb költségű élét. Minden további élt a lehető legkisebb költségűek közül jelöljünk ki, ügyelve arra, hogy G egyetlen körének se legyen valamennyi éle kijelölt. Az előbbihez hasonló módon be lehet látni, hogy ha az utasításnak megfelelően már nem jelölhető ki él, akkor G egy gazdaságos favázának éleit jelöltük ki. Alkalmazva ezt a módszert az alábbi, bal oldali ábrán levő gráfra, az eljárás végén a jobboldali gráfot kapjuk. Ennek építési költsége 30 egység.


6
2
3
9
6
4
5
3
2
8
3
7
3
8
9
6
2
3
2
4
7
3
3

Algoritmusok és gráfok

Tekintsük az alábbi feladatokat:

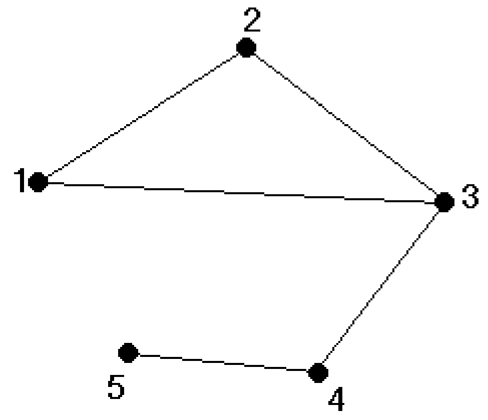
1. ***N*** dolgot kellene bepakolni egy ládába. Vannak azonban olyan párok, amelyek bizonyos okok miatt nem férnek össze (erről teljes információnk van). Válasszunk ki maximális számú tárgyat úgy, hogy ezeket betehessük a ládába (vagyis közülük bármely kettő összeférjen).
2. Lehet-e Budapestről a világ bármely fővárosába telefonálni? Ehhez tudnunk kell, hogy mely fővárosok között van közvetlen telefonvonal.
3. Válasszunk ki ***n*** ember közül a lehető legtöbbet úgy, hogy mindegyik ismerje a másikat!
4. Egy teherautó A városból B városba megy. Útja mentén vannak olyan A_1, A_2, ..., A_k, B_1, B_2, ...,B_k helyek (nem feltétlenül ebben a sorrendben). Minden A_i helyről a megfelelő B_i helyre el kellene szállítania valamit. Egyszerre csak egy dolgot szállíthat. Mely szállításokat vállalja el, hogy a lehető legtöbb kívánságnak eleget tudjon tenni?

Ezekben a feladatokban közös az, hogy ki akarunk választani maximálisan sokat egy összességből, olyan feltételek között, hogy bizonyos párok nem választhatók ki egyszerre. A viszonyokat leírhatnánk az alábbiak szerint: minden dolgot egy ponttal ábrázolunk. Ha két dolog összeférhetetlen, akkor összekötjük őket egy vonallal. Az összekötő vonalakat éleknek nevezhetjük. A feladatunk az, hogy minél több pontot válasszunk ki úgy, hogy közülük semelyik kettőt ne kösse össze él. Az ilyen ponthalmazt röviden ***független***nek hívjuk. Így végül a feladatokat a gráfokra vezettük vissza.

Ha a gráfot számítógépben tároljuk, akkor persze nem vihetjük be a gráf rajzát a gépbe. Ehelyett megszámozzuk a gráf pontjait az 1, 2, 3, ...,n számokkal és egy n*n-es mátrixot képezünk, melyben a_{ij} =1, ha az i-edik és j-edik pont össze van kötve és a_{ij}=0, ha nincsenek összekötve.

Ezt a mátrixot a gráf adjacencia-mátrixának (szomszédsági mátrix) nevezzük. A gráf mátrixa a főátlóra nézve szimmetrikus.

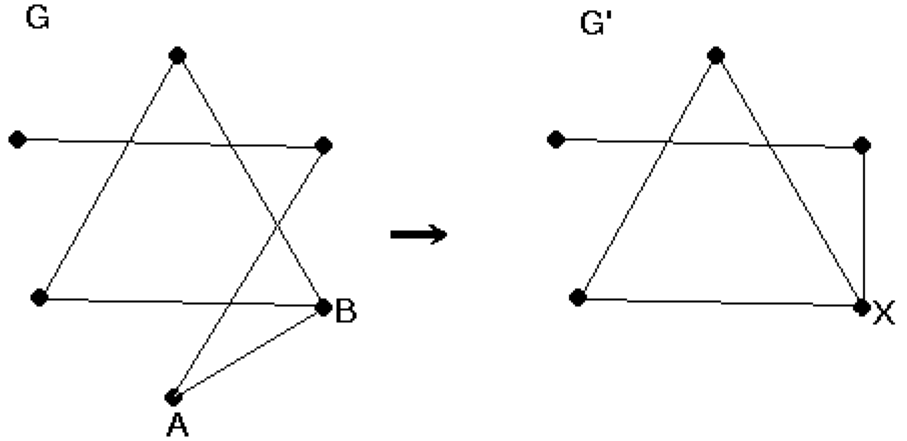
Példának okáért tekintsük az alábbi gráfot és annak adjacencia-mátrixát:



$$a=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Az általános pakolási feladatra igazán jó algoritmus nem ismeretes. Próbálgatós módszerekkel végig lehet vizsgálni az összes független halmazokat. A második példában a feladat a gráfok nyelvén annak megállapítása, hogy összefüggő-e a fővárosokat jelképező gráf vagy sem.

Itt egy egyszerű eljárásra ad lehetőséget az alábbi észrevétel: tekintsük a gráf egy élét. Legyenek ennek végpontjai A és B. Ezt az élt röviden (AB) élnek hívhatjuk. Jelöljük G'-vel az (AB) él összehúzásával kapott gráfot. Ebben A-t és B-t egy új ponttal helyettesítjük és ezt az új pontot mindazon régi pontokkal összekötjük, amelyekkel akár az A, akár a B össze volt kötve (lásd ábra).



Látható, hogy G' akkor és csak akkor összefüggő, ha G is az.

Lefordítva ezt az adjacencia-mátrix nyelvére, az alábbi eljárást kapjuk: jelölje n a pontok számát. Tegyük fel, hogy az első sorban van egy pozitív elem, legyen ez például az i-edik helyen. Adjuk hozzá az első sort az i-edikhez, majd az első oszlopot az i-edikhez, az alábbi értelemben:

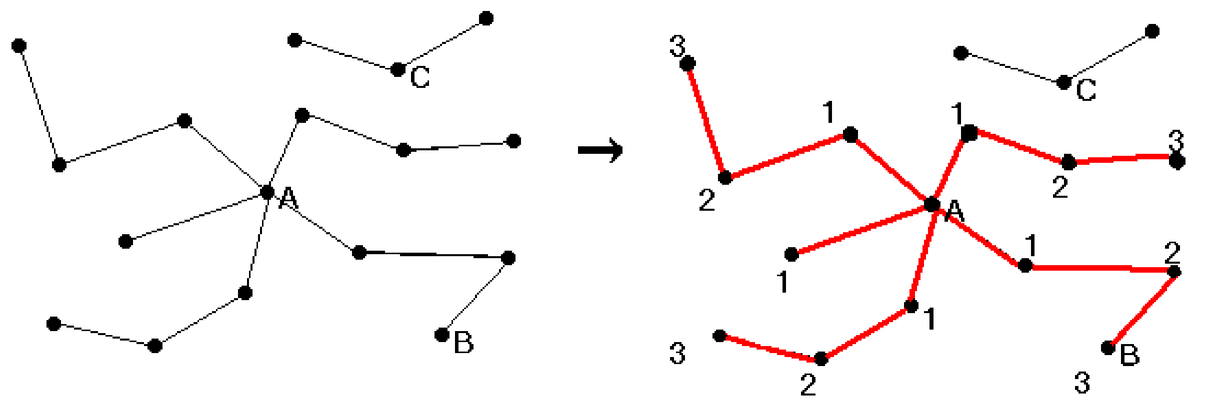
$$0+0=0,\ 0+1=1+0=1+1=1$$

Hagyjuk el az első sort és első oszlopot és az i-edik sor i-edik helyén létrejött 1-est változtassuk 0-ra. Ismételjük meg az eljárást. Ha közben eljutunk egy 1*1-es mátrixhoz, akkor a gráf összefüggő. Ha valahol elakadunk, mert az első sorban csupa nullák állnak, akkor a gráf nem összefüggő.

A legrövidebb út kérdése

Fontos kérdés lehet az összefüggőség mellett a legrövidebb összeköttetésé. Gráfokra ez így hangzik: adott egy gráf és benne két pont, A és B. Keressük meg az A-ból B-be vezető legrövidebb utat!

Általánosabban megfogalmazva: minden X ponthoz keressünk egy A-ból X-be vezető legrövidebb utat! Ezt úgy tesszük meg, hogy az i=1, 2, ... értékekre rendre megkeressük azokat a pontokat, melyek i hosszúságú úton elérhetők (feltételezzük, hogy bármely két szomszédos pont távolsága 1 egység). Az A-ből 1 hosszúságú úton elérhető pontokat jelöljük meg az 1-es számmal és színezzük az A-ből hozzájuk vezető éleket pl. pirosra. Keressük meg most mindazokat a pontokat, amelyeknek még nincs számuk és amelyek 1-es pontból élen elérhetők. Minden ilyen pontot jelöljünk meg 2-essel és színezzünk pirosra egy-egy beléjük befutó élt. Egy A-ból kettő hosszúságú úton elérhető pont az 1-es jelű pontok valamelyikén át érhető el, így 2-essel pontosan azok a pontok vannak megjelölve, amelyek A-ból elérhetők 2, de nem 1 hosszúságú úton. Folytatva az eljárást ha már az 1, 2, ..., i számokkal megcímkéztük a megfelelő pontokat, akkor jelöljük (i+1)-gyel azokat a pontokat, amelyeknek még nincs számuk és amelyek elérhetők egy i-vel jelzett pontból élen, majd fessünk pirosra minden ilyen ponthoz egy-egy olyan élt, mely i-vel jelzett pontból fut bele.



kiindulás színezés után

Az ábrán látható kiindulási gráf esetén az A pontból a B pont elérhető, 3 egységnyi hosszúságú úton, míg a C pont A-ból nem érhető el.

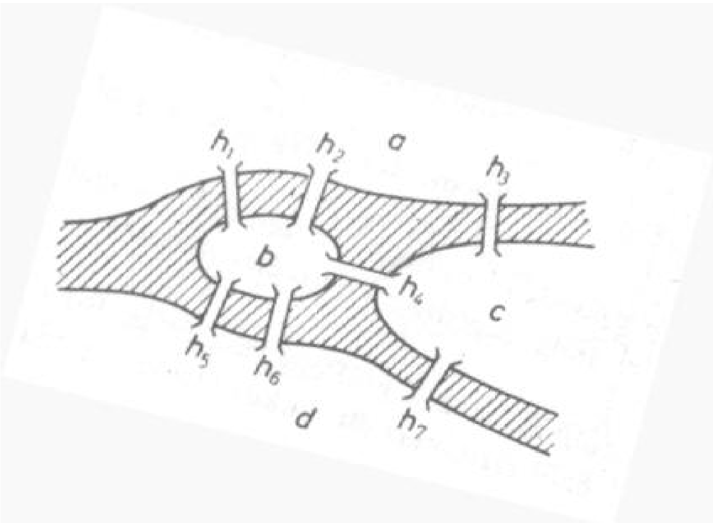
Az eljárás akkor ér véget, ha nincsen (i+1)-gyel megjelölendő pont. Vegyük most a B pontot. Ha ez nem kapott számot, akkor nem érhető el A-ból úton. Ha kapott számot, akkor ez az i szám lesz az A-ból B-be vezető legrövidebb út. Egy ilyen utat

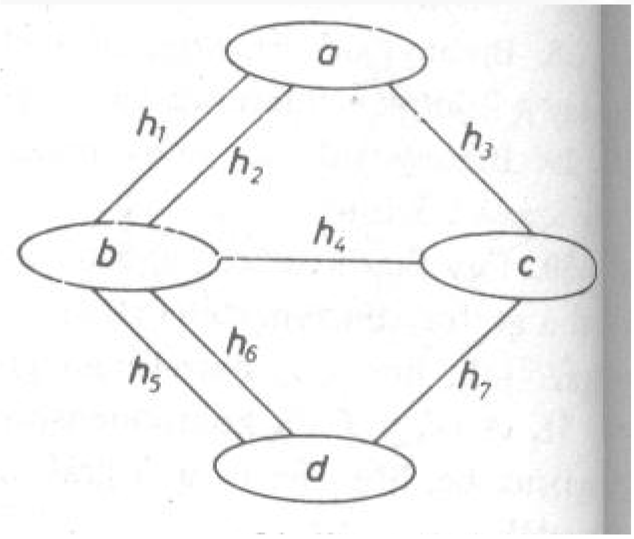
kapunk, ha a piros éleken át B-ből rendre
i-1, i-2, ...,2, 1 jelzésű pontokon visszamegyünk A-ba.

Egyszerűbb feladatok és egyéb érdekességek

1. <u>A Königsbergi hidak problémája</u>: Königsberg városát átszelő Pregel folyót hét híd ívelte át az 1. ábrán látható módon. A város polgárai felvetették a kérdést, hogy lehet-e olyan sétát tenni, hogy közben mind a hét hídon pontosan egyszer haladjanak át.

A probléma megoldásáért felkeresték Eulert, a kor híres matematikusát. Euler megoldotta a problémát és bebizonyította, hogy mind hét hídon pontosan egyszer áthaladó sétaút nem létezik. Fogalmazzuk át a feladatot a gráfok nyelvére. A két partot valamint a két szigetet jelöljük egy-egy betűvel ("a" és "d" a partokat, "b" és "c" a szigeteket jelöljék). A hidakat jelöljük "h" betűvel (h_1-től $h_{7\text{-ig}}$). Így juthatunk a 2. ábrához.



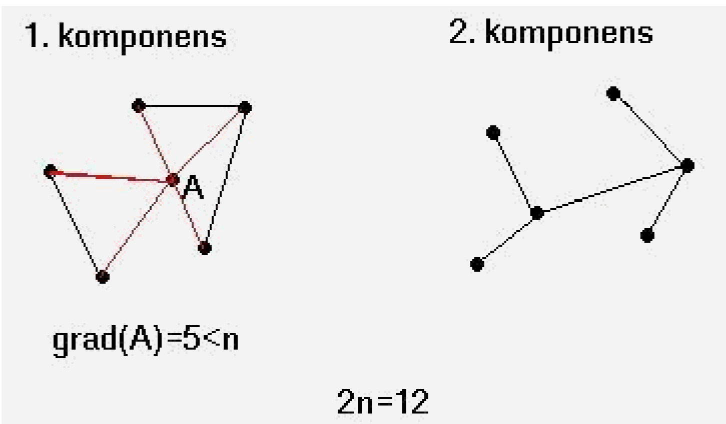


1. ábra 2. ábra

Látható, hogy mind a négy pont fokszáma páratlan. Ha mondjuk az “a” pontról indulunk, akkor itt nem végezhetjük a sétát, mert annak, hogy az “a” pontban fejezzük be a sétát, az a feltétele, hogy az “a” pont fokszáma páros legyen. Mind a négy pont fokszáma páratlan, de ezek közül csak egy lehet kiinduló pont és egy másik a séta utolsó állomása. Ugyanakkor a maradék két pontból is ki kellene tudni jönni, ami nem lehetséges, mert be-ki-be miatt ott kell maradnunk az adott pontban. De 3 végpontja nem lehet egyszerre ugyanannak a sétának. Ez viszont azt jelenti, hogy a feltételeknek megfelelő séta nem létezik. A megoldásból az is következik, hogy a feladatnak megfelelő séta csak akkor létezik, ha a pontok közül 2 vagy 0 darab olyan pont van, amelyeknek a fokszáma páratlan. Ha két darab páratlan fokú pont van a gráf pontjai között (a többi pedig páros fokszámú pont), akkor valamelyik páratlan fokú pontból kell, hogy induljon a sétánk és a másik páratlan fokú pontban kell, hogy végződjön.

2. Bizonyítsuk be, hogy ha ***2n*** számú telefonközpont mindegyikének van a többiek közül legalább ***n***-nel közvetlen összeköttetése, akkor bármely két központ között létesíthető telefonkapcsolat (esetleg közvetett módon).

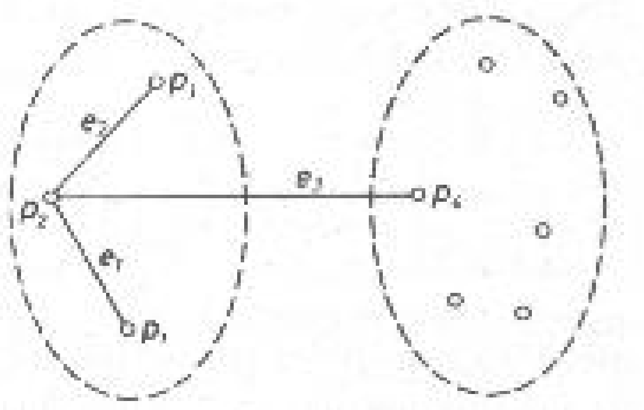
A feladatot a gráfok nyelvére átfogalmazva: azt kell belátni, hogy ha egy legfeljebb 2n-pontú egyszerű gráf minden pontjának foka legalább n, akkor a gráf összefüggő! A bizonyítást végezzük el indirekt módon. Tegyük fel, hogy a gráf nem összefüggő. Ekkor a gráf 1-nél több komponensből áll. A komponensek között kell legyen olyan, amelyben nem lehet n-nél több pont. Egy ilyen komponensbe tartozó bármely **A** pont csak ugyanezen komponensbe tartozó pontokkal lehet összekötve. Mivel a gráf egyszerű, ezért grad(**A**)**<=n-1. Ez viszont ellentmond annak a feltételnek, hogy az eredeti gráfban minden pont fokszáma legalább n!**



3. Bizonyítsuk be, hogy ha n számú telefonközpont közül bármely kettő között létesíthető kapcsolat, akkor van e központok között n-1 számú közvetlen összeköttetés is.

Azt kell belátni, hogy az n pontú összefüggő és egyszerű gráfnak legalább n-1 éle van. A bizonyításban azt használjuk ki, hogy bárhogyan is osztjuk fel egy összefüggő gráf pontjait két csoportba, mindig van a gráfnak olyan éle, amelynek két végpontja különböző csoportokba tartozik (lásd ábra).

Vegyük az n-pontú összefüggő egyszerű gráf egy tetszőleges p_1 pontját. Ha van G-nek $p1$–től különböző pontja, akkor a fent említett két csoport egyike álljon csupán p_1–ből. Van tehát G-nek p_1–hez illeszkedő e_1 éle. Jelöljük e_1–nek p_1–től különböző végpontját p_2–vel. Ha van G-nek $p1$–től és p_2–től különböző pontja, akkor a fent említett két csoport egyike álljon most p_1–ből és p_2–ből. Van tehát G-nek olyan e_2 éle, amelynek egyik végpontja p1 vagy p2, a másik pedig $p1$–től is és p_2–től is különböző. Jelöljük ezt p_3–mal. Nyilván e1? e2 . Az ábrán a szaggatott vonalak a pontok újabb két csoportba osztását jelzik. Folytatva az eljárást végül találunk G-ben n-1 számú élt. Ezzel beláttuk az állítást.



4. Az n-pontú és n-1 élű összefüggő gráfok fák.

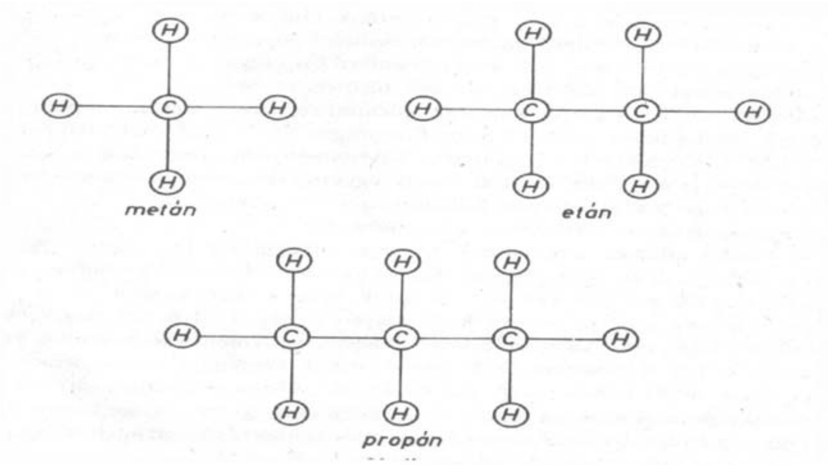
Ha volna egy n-pontú és n-1 élű, kört tartalmazó összefüggő gráf, akkor annak egy körbe tartozó élét törölve, n-pontú és n-2 élű összefüggő gráfot kapnánk. Ez viszont ellentétben áll azzal az állítással, mely szerint egy n-pontú összefüggő gráfnak legalább n-1 éle van.

Ez az állítás a minimális számú élt tartalmazó összefüggő gráfok egy jellemző tulajdonságát adja.

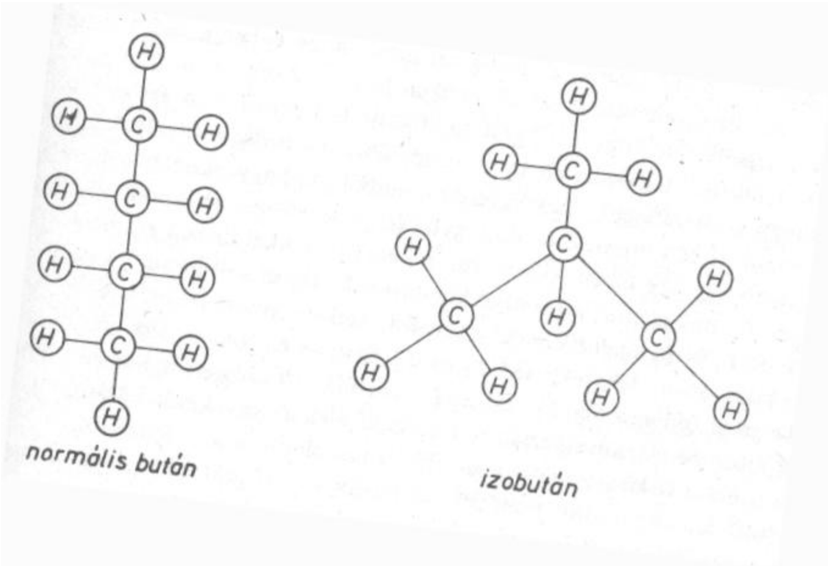
5. A paraffinmolekulák n számú szénatomból és 2n+2 számú hidrogénatomból állnak. Általános képletük:

$$C_nH_{2n+2} \ (n=1,2,3,...)$$

Molekuláris modelljeik összefüggő gráfokkal szemléltethetők. Ezekben a gráfokban a szénatomokat azonosító pontok fokszáma 4, a hidrogénatomokat jelképező pontok fokszáma pedig 1. Szemléltessük gráfokkal a paraffinok molekuláris modelljeit az n=1,2,3 és 4 esetben.



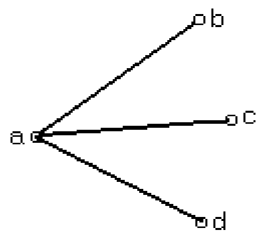
n=1, 2 és 3 esetén



n=4 esetén

6. Bizonyítsuk be, hogy egy hattagú társaságnak mindig van vagy három olyan tagja, akik ismerik egymást, vagy három olyan tagja, akik nem ismerik egymást!

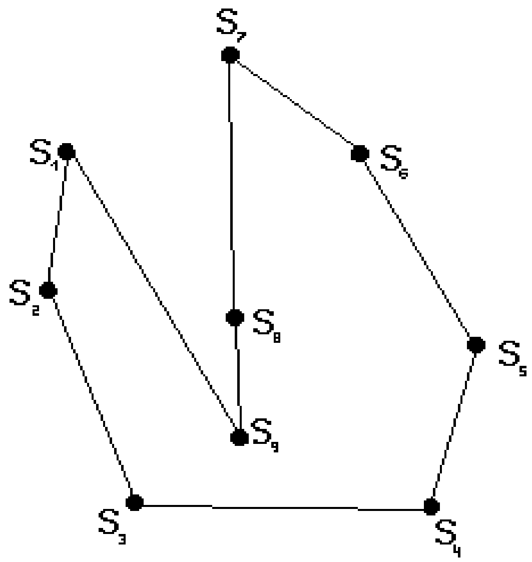
A feladatot a gráfok nyelvére a következő módon lehet átfogalmazni: minden 6-pontú egyszerű gráfnak vagy a komplementerének van háromszög részgráfja. Vegyük a 6-pontú egyszerű gráf egy tetszőleges A pontját. Osszuk a maradék 5 pontot két csoportba úgy, hogy az egyikbe azok kerüljenek, amelyek össze vannak kötve A-val, a másik csoportba pedig azok, amelyek nincsenek összekötve A-val. Az egyik csoportba mindenképpen legalább 3 pont kerül. Legyen ez a 3 pont B, C és D. Ha ezek a pontok össze vannak kötve A-val, továbbá valamelyik kettő egymással is, akkor van egy olyan hármas, amelyben bármely két pont éllel össze van kötve (az adott 3 ember tehát ismeri egymást). Ha a 3 pont mindegyike össze van kötve A-val, de egymással nincsenek összekötve, akkor van 3 olyan pont (B, C és D), amelyek között nincs él, tehát ezek az emberek nem ismerik egymást. Ha az A pont nincs összekötve a B, C és D pontok egyikével sem, és ezen utóbbi pontok között van 2 olyan, amelyek szintén nincsenek összekötve, akkor ez a két pont, valamint az A pont egy olyan hármast alkotnak, amelyhez tartozó emberek nem ismerik egymást. Ugyanakkor, ha a B, C és D pontok között nincsen 2 olyan, amelyek nincsenek éllel összekötve (vagyis bármelyik kettő között halad él), akkor ezek az emberek hárman ismerik egymást. Ezzel beláttuk az állítást!



Gráfokkal megoldható nehezebb feladatok

1. feladat: Egy n*n-es táblázat minden mezőjében egy betű áll. A táblázat bármely két sora különböző. Bizonyítsuk be, hogy a táblázatnak van olyan oszlopa, amelyiket elhagyva a megmaradó táblázatnak nincs két egyező sora! (Kürschák József Matematikai Tanulóverseny-1979. év 3. feladata)

Bizonyítás: Tegyük fel indirekt, hogy az állítás nem igaz. Ekkor minden oszlophoz tartozna legalább két olyan sor, amelyik csak az adott oszlopbeli betűben különbözik. Minden oszlophoz válasszunk ki egy ilyen sorpárt. Ezt a kiválasztást szemléltethetjük úgy, hogy az i-dik sort egy S_i ponttal ábrázoljuk és ha az i-dik és j-edik sor egy kiválasztott sorpár, akkor az S_i és S_j pontokat összekötjük egy vonallal. Így egy gráfot kapunk.



A gráfnak n pontja van (az ábrán n=9) és ugyanannyi éle. Az ***Alapfogalmak 5. tétele*** szerint az ilyen gráfban mindig van kör. Az adott kör a táblázatra nézve azt jelenti, hogy az i_1 -ik és i_2 -ik sor csak egy betűben, mondjuk a j-edik oszlopbeliben különbözik. Az előbbiben itt legyen a_1, az utóbbiban pedig egy ettől különböző a_2 betű áll. Az i_2 -ik és i_3 -ik sor is csak egy betűben különbözik és ezek egy másik oszlopban állnak, tehát az i_3 -ik sor j-edik betűje szintén a_2. Hasonlóan az i_4 -ik, … i_k -ik j-edik betűje is a_2 . De az i_k -ik és i_1 -ik sor is csupán egy betűben különbözik és ezek is egy, a j-ediktől különböző oszlopban állnak. Így az i_1 -ik sor j-edik betűje is a_2 kellene, hogy legyen. Ott viszont az a_2 -től különböző a_1 betű áll. Így abból a feltevésből kiindulva, hogy bármelyik sor elhagyásával keletkezik két egyező sor, ellentmondásra jutottunk. Tehát igaz az eredeti állítás.

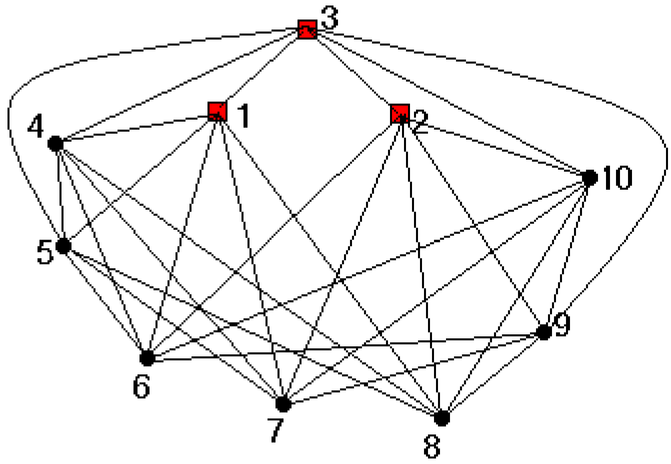
2. feladat: Egy tíztagú társaság minden tagja legalább hét másikat ismer. Mutassuk meg, hogy bármely három embernek van közös ismerőse! (OKTV 1986. év, II. forduló, 3. feladata, I. kategória)

Bizonyítás: Feleltessünk meg az embereknek pontokat és ha két ember ismeri egymást, akkor kössük össze őket egy vonallal. Így egy gráfot kapunk. Átfogalmazva a feladatot gráfokra, az a következőképpen szólna: ha 10 pont mindegyikét legalább 7 másikkal vonal köti össze, akkor a pontok közül bármelyik háromhoz vezet három, közös végpontú vonal. Vagy más megfogalmazásban: ha egy 10 pontú egyszerű gráf minden pontjának fokszáma legalább 7, akkor bármely 3 pontjának van közös szomszédja.

A 10 pontból tetszőlegesen válasszunk ki kettőt. Legyenek ezek A és B. Ennek a két pontnak legalább 4 közös szomszédja van a gráfban. Ha ugyanis legfeljebb 3 közös szomszédjuk volna, akkor A és B ezeken és egymáson kívül legalább még 3-3, azaz összesen legalább 6 egymástól különböző ponttal össze volna kötve. Ekkor viszont legalább 11 pontból állna a gráf (A és B az két pont, a három közös szomszéd és még hat pont, az összesen 11 pont), holott csupán 10 pontja van a gráfnak.

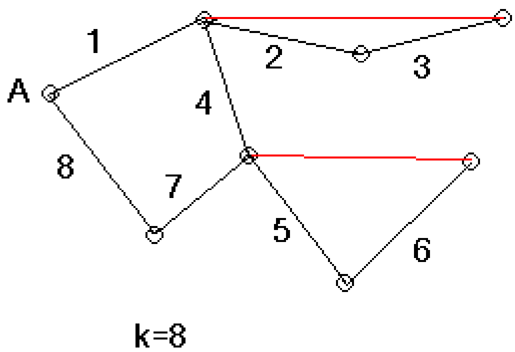
Tekintsük a gráf egy további C pontját. Ha ez a pont az A és B pontok közös szomszédain kívüli pont, akkor a közös szomszédokon kívül legfeljebb 5 másik ponttal lehet összekötve. De a feladat feltételei szerint még legalább 2 másik ponttal is össze kell legyen kötve. Kell tehát, hogy ebből a C pontból vezessen él az A és B közös szomszédai egyikéhez is. Így A és B valamint C mindegyike össze van kötve ezzel a közös szomszéddal, ami visszafordítva azt jelenti, hogy A, B és C-nek ez a személy közös ismerőse. Ha ez a C pont az A és B közös szomszédai közül az egyik pont, akkor a közös szomszédokon kívül legfeljebb 6 másik ponttal lehet összekötve. Így még valamelyik közös szomszéddal is össze kell legyen kötve ez a pont, nevezzük ezt a pontot D-nek. Megint azt kaptuk, hogy az A, B és C pontok mindegyike össze van kötve D-vel, vagyis visszafordítva: A, B és C ismerik D-t. Ezzel bebizonyítottuk az állítást.

Megmutatható, hogy a feladat szövegében szereplő 10 és 7 számok éles korlátot jelentenek, egyik sem növelhető illetve a másik sem csökkenthető a feladat általánosításának csorbítása nélkül. Erre látható egy példa az alábbi ábrán. Itt a 10 pontú gráf minden pontjának fokszáma éppen 6, de van három olyan pont (1, 2 és 3), amelyeknek nincs közös szomszédja. Lásd az ábrát alant.



3. feladat: Legyen a G összefüggő gráf éleinek száma k. Bizonyítsuk be, hogy meg lehet az éleket számozni az 1, 2, 3, …, k számokkal úgy, hogy minden olyan csúcs esetén, amelyből legalább két él indul ki, az illető csúcsokból kiinduló összes élhez rendelt számok legnagyobb közös osztója 1 legyen! (NMD feladat 1991/4)

Bizonyítás: Tudjuk, hogy egy gráfban a páratlan fokú pontok száma páros (***Alapfogalmak-2. tétel***). Foglaljuk párokba a páratlan csúcsokat és kössük össze ezeket piros színű éllel (a gráf eredeti élei feketék). Az így adódó gráf (amely az eredeti gráf részgráfja) minden csúcsa most már páros fokú. Az eredeti gráffal együtt tekintve, előfordulhat, hogy két csúcsot egy fekete és egy piros él is összeköt, de egy csúcsból így természetesen legfeljebb egy piros él indulhat ki. Az eredeti gráfunk ezen új élek berajzolásával ún. Euler-féle gráf lett. Ennek jellemző tulajdonsága, hogy egy tetszőleges gráfcsúcsból kiindulva a gráf élei bejárhatók úgy, hogy minden élen egyszer és csak egyszer haladjunk át és visszaérkezzünk a kiindulási pontba.



Járjuk be a kiegészített gráf éleit a következő eljárás szerint: az A csúcsból kiindulva a kiindulási fekete élre 1-est írunk és a haladásnak megfelelően minden új fekete élre 1-gyel nagyobb számot írunk rá. Ha közben piros élen haladunk át, arra nem írunk számot. Mivel az Euler-féle vonal (kör) minden élt tartalmaz, ezért az eredeti gráf minden élére fog kerülni szám. Ha egy csúcsban csak fekete él van, biztosan van rajtuk két szomszédos szám. Ezek viszont relatív prímek. Ha egy csúcsnál a piros él mellett még legalább három fekete él van (pontosan kettő nem lehet, mert akkor nem lenne ott piros vonal!), akkor az adott csúcson az Euler-vonal legalább kétszer áthalad, és így az egyik áthaladásnál fekete élhez fekete él fog csatlakozni, tehát itt is van valamelyik élpáron szomszédos szám. Ha egy csúcs piros élt is tartalmaz és mellette ***egy*** fekete él van, akkor teljesen mindegy a feladat szempontjából, hogy a fekete élen milyen szám áll. Ezzel az eljárással a feladat követelményeit teljesítettük.