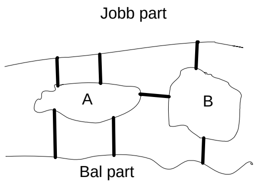
III. Euler-gráfok,Euler-utak, Hamilton-utak és Hamilton-körök

" Az út örök és tétlen
mégis mindent végbevisz észrevétlen…"

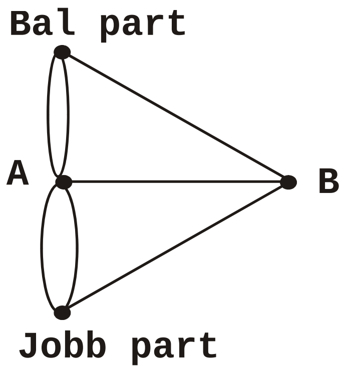
Lao-Ce, Tao Te King, Az Út és Erény könyve, Weöres Sándor fordításában,Tericum Kiadó,1994,(37 vers)

III.1. Euler gráfok:



1. ábra

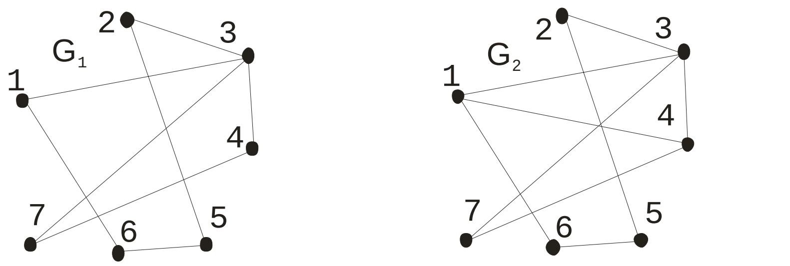
Leonard Euler (1707-1783) nevéhez kapcsolódik az első gráfelméleti munka, mely 1736-ban jelent meg a Szentpétervári Tudományos Akadémia közleményeiben. Az értekezését Euler az ún. Königsbergi hidak problémájával kezdte. A Pregel folyó A, B szigeteit hidak kötötték össze egymással és a partokkal is. Az A szigetet két párhuzamos híd kötötte össze a jobb parttal, egy híd a B szigettel, s ugyancsak két párhuzamos híd vezetet az A-ról a bal partra is. B-t egy-egy híd kötötte össze a bal és a jobb parttal is és B-ről vezetet egy híd A-ra is , melyet az előbb már említettünk. A kérdés az volt, be lehet e járni a hidakat valamely fix C pontból oly módon, hogy minden hídon átmegyünk pontosan egyszer. Euler lényegében teljes általánosságban megoldotta a feladatot.



2. ábra

III.1.Definíció: *A $G=(E,\varphi,V)$ gráf L élsorozatát ($\varphi(e_1)=(v_0,v_1),\varphi(e_2)=(v_1,v_2),\ldots,\varphi(e_n)=(v_{n-1},v_n)$)-t Euler-vonalnak nevezzük, ha E minden élét pontosan egyszer tartalmazza. S zárt Euler-vonalnak mondjuk, ha $v_0=v_n$, egyébként pedig ha $v_0 \neq v_n$ akkor L-t nyílt Euler-vonalnak hívjuk.*

Ha valamely gráfnak van zárt Euler-vonala szokás azt Euler-gráf névvel illetni. Nyilván egy Euler-gráf összefüggő és bármely csúcspontjának a foka páros, mivel ha az Euler-vonala betér valamely csúcspontba mind annyiszor ki is megy onnan. Megjegyezzük, hogy van aki Euler-gráfnak nevez olyan gráfot, amelynek bármely csúcsfoka páros. A következő tétel lényegében Eulertől származik.



1,3,4,7,3,2,5,6,1 1,3,2,5,6,1,4,7,3,4

Zárt illetve nyílt Euler-vonal.

3. ábra

III.1. Tétel: *A G gráf akkor és csak akkor Euler-gráf, ha összefüggő és bármely csúcsának a foka páros.*

A tételre két különböző bizonyítást adunk. Az első egy konstruktív bizonyítás, amely lényegében algoritmust ad Euler-gráf Euler-vonalának a megkeresésére. A második bizonyítás rövid, s tömör,de csak az Euler-vonal létezését igazolja, s nem ad ötletet arra, hogyan lehet találni egy konkrét Euler-vonalat.

Bizonyítás I.: Az, hogy egy Euler-gráf szükségképpen összefüggő és minden csúcspontjának a foka páros, az remélhetően világos a tétel előtti sorokból. A feltétel elégséges voltához tekintsük a G gráf valamely zárt vonalát. Zárt vonala van G-nek, mivel G valamely v_0 pontjából elindulva egy v_0-ra illeszkedő e_1 élen[1] eljutunk v_1-be, s v_1-ből e_2 mentén v_2-be, és így tovább $v_0 e_1 v_1 e_2 ... v_{i-1} e_i v_i ... v_{k-1} e_k v_k$ .Végül e_k elvisz $v_k=v_j$-be $(j<k)$, ahol a v_j olyan csúcsot jelöl, amelyben már jártunk.Nem mehetünk mindig új csúcsba, mivel G-nek véges sok csúcsa van csupán. Legyen ez a létező zárt útja G-nek L_1-lel jelölve. A csúcsok és élek esetleges újraindexelése után feltehetjük, hogy $L_1 = v_0 e_1 v_1 e_2 ... v_{i-1} e_i v_i ... v_{k-1} e_k v_k$. Ha azt L_1 élsorozat tartalmazza a G gráf valamennyi élét, akkor kész vagyunk. Ha nem tartalmazza például az e' élt és u_1,u_2 ezen él két végpontja, akkor u_1-ből indulva az előbbiekhez hasonlóan találunk egy ugyancsak u_1-ben végződő L_2 zárt vonalat. Természetesen ügyelnünk kell arra, hogy L_1 éleit ne válasszuk be L_2 élei közé. Ha u_1 az L_1 zárt vonal valamely élére is illeszkedett (vagy L_2 valamely másik csúcspontja illeszkedett L_1-re), akkor az L_1,L_2 zárt vonalakat lehet egyetlen zárt vonalnak tekinteni. Megtehetjük ugyanis azt, hogy az L_1,L_2 vonalakat valamely közös u_j pontjukból járjuk végig. Először L_1-t majd utána ugyancsak u_j-ből L_2-t járjuk be. Ha az L_1 ill. L_2 vonalaknak nem volna közös csúcspontja, akkor L_2-t cseréljük ki oly módon , hogy először vezessünk u_1-ből utat[2] L_1 valamely csúcspontjába, olyan utat, amelynek nincs közös éle L_1-el, s ezt az utat egészítsük ki az L_2' zárt vonallá az előbbi módon. Ha nem maradt ki él kész vagyunk, ha igen akkor megismételjük az előbbi eljárást és mivel a gráfunk véges előbb vagy utóbb az eljárásunk véget ér és megadja a G gráf egy zárt Euler-vonalát.

Reméljük a Tisztelt Olvasó felfigyelt arra, hogy az elmondott bizonyításunk lényegében algoritmust ad a G gráf Euler-vonalának meghatározására. Le lehet rövidíteni a fenti bizonyítást, de akkor elvész az algoritmikus jelleg.Nézzük most a látszólag elegánsabb, "rövidebb" bizonyítást.

---

1 A v_0 csúcs foka $d(v_0) \geq 2$,egyrészt G összefüggősége miatt $d(v_0) > 0$, másrészt a csúcsok fokszámainak páros volta miatt $d(v_0) \geq 2$, s ezért létezik legalább egy e_1 él, mely illeszkedik v_0-ra.

2 A G összefüggősége miatt u_1-ből L_1 bármely pontjába vezet út.

Bizonyítás II.: Legyen G-nek $L = v_0 e_1 v_1 e_2 ... v_{i-1} e_i v_i ... v_{k-1} e_k v_k$ a leghosszabb vonala. Ha L tartalmazza G minden élét kész vagyunk. L Euler-vonala G-nek. Ha L nem tartalmazza például G-nek az f élét (ez az indirekt feltevésünk), akkor G összefüggő volta miatt feltehető, hogy f egyik végpontja mondjuk w egybeesik L valamely csúcspontjával. Az L vonal maximális voltából és abból, hogy G-nek minden csúcs foka páros következik, hogy L zárt azaz $v_k = v_0$. L zártsága miatt bejárhatjuk L éleit w-ból indulva, s mikor utoljára visszaérünk w-ba menjünk tovább f másik végpontjába. Az így kapott L' vonalnak eggyel több éle volna, mint L-nek, s ez ellentmondana L maximális vonal voltának. Az ellentmondás oka, hogy feltettük, hogy L maximális és van olyan éle G-nek amely nincs L-ben.

III.2.Tétel: *A következő állítások a $G = (E, \varphi, V)$ összefüggő gráfra ekvivalensek:*

1. *A $G = (E, \varphi, V)$ Euler gráf azaz van zárt Euler vonala.*
2. *$G = (E, \varphi, V)$ minden csúcsának a foka páros.*
3. *$G = (E, \varphi, V)$ élidegen körök uniója.*

Bizonyítás: A bizonyítást $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$ séma alapján érdemes elvégezni.

$1 \Rightarrow 2$ Ahhoz, hogy az első állításból következik a második elegendő azt észrevenni, hogy tetszőleges L zárt vonal, tetszőleges u csúcspontjára igaz, hogy ha L bejárása során λ esetben kimentünk u-ból, akkor L végig járása során λ esetben u-ba be is tértünk. S ezért u foka $d(u) = 2\lambda$. Azaz G-nek valóban bármely csúcspontjának a fokszáma páros.

$2 \Rightarrow 3$. A G gráf összefüggőségéből és csúcsai fokszámának páros voltából az adódik, hogy $\forall v \in V(G) \Rightarrow d(v) \geq 2$. Ha a G gráf tetszőleges v csúcspontjáras teljesedik, hogy $d(v) \geq 2$, akkor v-ből elindulva kapunk G-nek egy L zárt vonalát. Zárt vonal mindig tartalmaz legalább egy kört. Ugyanis a zárt vonal $L = v_0 e_1 v_1 e_2 ... v_{i-1} e_i v_i e_i ... e_{j-1} v_j e_j ... v_{k-1} e_k v_k$ valamely pontjából elsétálva a séta során az elsőnek megtalált ismétlődő pont $v_i = v_j$ közti rész $C = v_i e_{i+1} ... e_{j-1} v_j$ kört ad. Tetszőleges kör bármely pontjának a fokszáma páros. Ha a G gráfunk valamely C körének éleit töröljük akkor G bármely csúcspontzjának a foka továbbra is páros maradt. S mindaddig találunk újabb élidegen körököt, amíg az élek törlése után megmaradó gráfnak van olyan v csúcspontja melynek foka $d(v) \geq 0$. S az eljárás miatt a körök éleinek a halmazai diszjunktak.

$3 \Rightarrow 1$ Valóban ha a G gráf összefüggő és élidegen körök uniója, akkor be lehet járni a gráf éleit oly módon, hogy minden élen csak egyszer megyünk végig. bizonyítsunk mondjuk a körök száma szerinti teljes indukcióval. Ha csak egy élidegen körből áll a gráf, akkor azaz egy kör önmagában lesz egy zárt Euler-vonal. Ha már k-1 kört bejártunk s a "k" körrel a zárt vonalunknak az u pontja közös[3],akkor járjuk be a "k-1" kört alkotta zárt vonalat u-ból elindulva,majd ha már vissza tértünk u-ba folytassuk a bejárást a "k." kör éleinek a bejárásával.

III.3. Tétel: *Ha a G egyszerű összefüggő gráfnak, 2k darab páratlan fokú csúcspontja van, akkor élei lefedhetők k darab nyílt vonallal.*

---

3 Vegye észre a Kedves Olvasó, s még jobb ha meg is indokolja,hogy ha a G összefüggő gráf éleit valamely u pontból végig lehetet járni egy zárt vonal mentén,oly módon hogy minden élen csupán egyszer ment végig ,s végül u-ba futott be, akkor a gráf bármely másik v pontjából elindulva is végig járhatja G éleit (s mindegyik élen csak egyszer menve végig) oly módon, hogy a bejárást v-ben fejezi be.

Bizonyítás: Egészítsük ki a G gráfot k darab éllel G'-vé, oly módon, hogy G' minden csúcsának a foka páros legyen, ez nyilván megtehető, ha ügyelünk arra, hogy az új élekkel mindig páratlan fokú csúcsokat kössünk össze. G'-re ekkor teljesedni fog az III.I.E1 tétel feltétele, s ezért lesz egy zárt Euler-vonala is, mely triviálisan tartalmazza az "új" k darab élt is. Ha a k darab új élt töröljük k darab nyílt vonalat kapunk. (Miért nem kaphatunk kevesebbet k-nál?), s a bizonyítás ezzel kész.

III.2. Hamilton-körök,Hamilton utak

Sir Villiam Rovan Hamilton4 (1805-1865) 1859-ben egy olyan játékot hozott forgalomba, melynek a lényege az volt, hogy egy előre megadott gráf csúcspontjait kellett bejárni, oly módon, hogy bármely csúcsban pontosan egyszer kellett járni. Állítólag a játéknak nem volt átütő sikere Hamilton kortársai között.

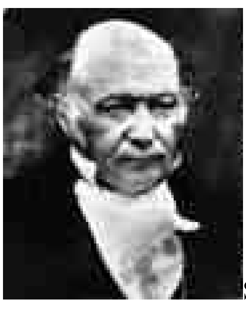
III.2. Definíció: *A $G=(E,\varphi,V)$ gráf H útját ($\varphi(e_1)=(v_0,v_1),\varphi(e_2)=(v_1,v_2),\ldots,\varphi(e_n)=(v_{n-1},v_n)$)-t Hamilton-útnak mondjuk, ha $v_0,v_1,\ldots,v_n$ csúcsok mind különbözők és e csúcspontokon kívül más csúcspontja nincs G-nek.*

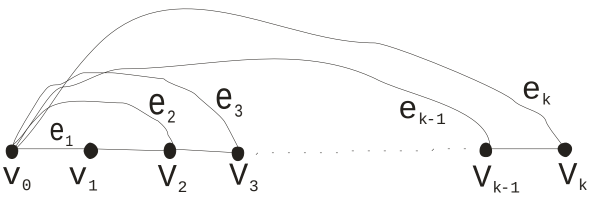
III.3. Definíció: *A $G=(E,\varphi,V)$ gráf K körét Hamilton-körnek mondjuk, ha K tartalmazza G minden csúcspontját is.*

Látszólag nagyon hasonló probléma, hogy valamely gráfnak az éleit járjuk be pontosan egyszer, vagy a csúcspontjait. Az utóbbi azonban jóval nehezebb. S az általános esetben Hamilton-utak illetve Hamilton-körök keresésére ma sem ismert igazán jó algoritmus. Operációkutatás területéhez tartozik az utazó ügynök problémája. Az utazó ügynök problémája azt jelenti, hogy a kereskedelmi utazónak adott városokat kell bejárnia, oly módon, hogy minden városba csak egyszer megy el, és végül visszatér a cégének a székhelyére. Ez esetben a gráf csúcspontjai az utazó által meglátogatandó városok, az élek pedig a városokat összekötő útvonalak. Természetesen egy-egy útnak jól meghatározott utiköltsége is van, s több út esetén célszerű azt az utat választani, melynek a költsége minimális. Ha valamely G gráf éleihez valós számokat rendelünk, akkor hálózatokról, folyamokról beszélünk. S nagyon természetesen vetődik fel minimális költségű ill. maximális nyereségű utak esetleg körök keresése. Az előbb említett feladatok a kombinatorikus optimalizálás tárgykörébe tartoznak. A következő tétel megfogalmazása előtt említjük meg, hogy egy kör ill. út hosszán a bennük szereplő élek számát értjük.

III.4. Tétel: *Ha a G egyszerű gráfban bármely csúcspont foka legalább k ($k\geq 2$), akkor van a gráfban egy legalább k+1 hosszúságú kör.*

---

4 Sir Villiam Rovan Hamilton (1805-1865) Dublinban született, családja Skóciából származik. Nyelvi és matematika tehetsége nagyon korán megmutatkozott. 15 éves korában már Newton és Laplace írásait olvasta.Saját maga a kvaterniók felfedezését tartotta legfontosabb eredményének. Ma e véleményével kevesen értenek egyet.



4. ábra

Bizonyítás: Legyen a G gráfnak az L út a leghosszabb útja. S ezen út csúcspontjait a kezdő ponttól indulva jelölje rendre $v_0, v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n$. Az, hogy v_0 foka legalább k azt jelenti, hogy a v_0-t v_1-el összekötő e_1 élen kívül még legalább k-1 él indul ki v_0-ból. Ezen élek másik végpontjai szükségszerűen szerepelnek L csúcspontjai között, mert ellenkező esetben összeütközésbe kerülnénk azzal, hogy az L út a leghosszabb. Legyen e_2' másik végpontja mondjuk v_2, e_3' végpontja v_3 és végül e_k' végpontja v_k. Ekkor az L útnak a v_0-tól v_k-ig tartó rész útjának két végpontját köti össze e_k' , ezért egy kört kapunk, melyben legalább k+1 él van, s ezzel a bizonyítás kész.

III.5. Tétel: *Ha a $G = (E, \varphi, V)$ egyszerű gráf bármely v csúcsának fokára teljesül, hogy $\delta(v) \geq \frac{|V|}{2} = \frac{n}{2}$, akkor G összefüggő.*

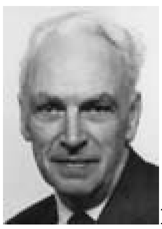
Bizonyítás: Legyen u és v két különböző csúcsa G-nek. A feltétel szerint u-val és v-vel is legalább n/2, n/2 pont van összekötve az u-ból illetve v-ből induló élek által, a fokszám feltétel miatt. Az előbb említett u-val, illetve v-vel közvetlenül összekötött pontok között van olyan, mely u-val is v-vel is össze van kötve, (ha nem lenne ilyen akkor G csúcsainak a száma nagyobb egyenlő volna, mint [n/2+n/2+2]) azaz u és v között vezet út.

Ha adott a $G = (E, \varphi, V)$ gráf, a csúcsainak a számát $|V| = n$ szokás G rendjének mondani, s éleinek számát $|E| = q$ a G gráf méretének mondani. Ha az u-t az e él összeköti a v csúccsal, akkor u-t ill. v-t az e él vég pontjainak nevezzük és u-t ill. v-t szomszédosnak mondjuk. Az u csúcsponttal szomszédos csúcsok halmazát N(u)-val jelöljük.

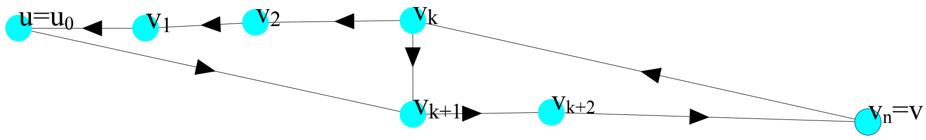
III.6.Tétel(O.Ore5 (1960.)): *Ha a G gráfra teljesül, hogy rendje n≥3 és bármely két nem szomszédos u,v csúcspont fokának az összege nagyobb egyenlő G rendjénél ($\delta(u) + \delta(v) \geq n$), akkor G-nek van Hamilton-köre.*

Bizonyítás: Indirekt bizonyítunk. Azon gráfok közül, melyekre a tétel feltételei teljesednek, de az állítás nem, tekintsük valamelyiket azon G' gráfok közül, melynek az

---

5 **1899.X.7. Kristiania-ban a (a mai Oslo-ban Norvégiában)** született és ott is halt meg 1968.VIII:13. Fiatal korában algebrai számelmélettel foglalkozott, később hálóelmélettel,gráfelmélettel.1927.-ben professori kinevezést kapott a Yale egyetemre, 1931.-ben a Yale egyetem kítűnő professzora címet kapta, s 37 évvel később 1968.-ban onnan is ment nyugdíjba. Több könyvet írt különböző a matematika különböző területeiről, számelméletről, négyszínsejtésről, gráfelméletről.

éleinek a száma maximális. Maximális abban az értelemben, hogy ha G'-hez hozzá vesszünk egy olyan e élt, mely a nem szomszédos u és v éleket köti össze, akkor az így kapott G gráf már tartalmazni fog Hamilton-kört. G' minden Hamilton köre tartalmazza az e élt, ezért van olyan L Hamilton-útja G'-nek, mely u-t és v-t köti össze, legyen ez az út megadva $\varphi(e_1)=(v_0,v_1),\varphi(e_2)=(v_1,v_2),\ldots,\varphi(e_n)=(v_{n-1},v_n)$ $(u=v_0,\ v=v_n)$ által. A $v_0,v_1,\ldots,v_k,v_{k+1},\ldots,v_n$ csúcspontokkal kapcsolatban vegyük észre, hogy ha v_{k+1} szomszédos u-val azaz v_{k+1} eleme N(u)-nak, akkor v_k nem eleme N(v)-nek.



5. ábra

Ellenkező esetben a $v_0,v_{k+1},v_{k+2},\ldots,v_n,v_k,v_{k-1},\ldots,v_0$ Hamilton-köre volna G'-nek. Tehát a V-{v} pontok közül az u-val szomszédos pontok nem szomszédosak v-vel, ezért $\delta(u)\le(n-1)-\delta(v)$ s ez utóbbi egyenlőtlenség ellentmond a tétel feltételeinek. Ore tételének speciális esete Dirac tétele.

Következmény(G.A. Dirac (1952)): Ha az n=2k csúcspontú egyszerű G gráf bármely pontjának a foka legalább k, akkor van G-nek Hamilton-köre.

Az időrendben való jobb tájékozódás végett egységes jelölés mellett felsoroljuk a Hamilton-körökre vonatkozó érdekesebb eredményeket. Jelölje a G(E,φ,V) gráf csúcspontjainak fokszámait rendre $d_1\le d_2\le\ldots\le d_n$ (|V|=n).

III.7. Tétel: *Ha a G(E,φ,V) egyszerű gráfra (2<n) a következő feltételek valamelyike teljesedik, akkor van G.-nek Hamilton-köre:*

1; G.A. Dirac (1952) $1\le k\le n\Rightarrow d_k\ge\frac{1}{2}n$,

2; O.Ore (1961) $u,v\in V, de\ (u,v)\notin E\Rightarrow\delta(u)+\delta(v)\ge n$,

3; Pósa Lajos(1962) $1\le k\le\frac{1}{2}n\Rightarrow d_k>k$,

4; J.A.Bondy (1969) j<k, $d_j,d_k\le k-1\Rightarrow d_j+d_k\ge n$

5;V. Chvátal (1972) $d_k\le k<\frac{1}{2}n\Rightarrow d_{n-k}\ge n-k$.

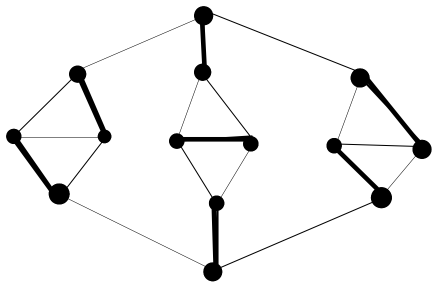
Valóban G-ben létezik Hamilton-kör, mivel a következmény feltételei lényegében szigorúbbak, mint a (H3) tétel feltételei.

III.4.Definició: *A G gráf G' részgráfját G k-adfokú faktorának mondjuk, ha*

(i) G' csúcsainak halmaza megegyezik G csúcsainak halmazával,

(ii) G' bármely csúcsa azonos k fokszámú.

A definícióból látható, hogy valamely G gráfnak a K Hamilton-köre egyben másodfokú faktora G-nek.



6. ábra

A 6. ábrán látható gráfnak vastag, szaggatott, illetve vékony vonallal jelöltük egy-egy elsőfokú faktorát. Ellenőrizze le a Kedves Olvasó, hogy a három elsőfokú faktor közül bármely kettő "szorzata" az ábrán látható gráfnak egy-egy másodfokú faktorát adja, de a gráfnak nincs Hamilton-köre, de a keletkező körök természetesen lefedik G csúcsait.

III.8. Tétel: *Ha a G egyszerű összefüggő gráfnak van olyan k csúcsa, melyek törlése után k+1 komponensére esik szét, akkor G-nek nincs Hamilton-köre.*

Bizonyitás: Indirekt bizonyitunk. Elegendő arra gondolni, hogy egy kör k darab pontjának törlése után legfeljebb k részre eshet szét

III.9.Tétel: *Ha a G egyszerű osszefüggő gráfnak van olyan k pontja melyek törlése után k+2 komponensre esik szét, akkor G-nek nincs Hamilton-útja (s persze még kevésbé van Hamilton köre).*

Bizonyitás: Indirekt bizonyitunk tegyük fel hogy G-nek az L Hamilton-útja, azaz L-re illeszkedik G minden csúcs pontja. Bármely út, igy persze L is k darab pontjának a törlésével legfeljebb k+1 részre bomlik, s ez ellentmond a tétel feltevésének , mely szerint legalább k+2 részre kellene bomolnia.

III.5.Definició: *Legyen a G gráfnak* $G_1, G_2, \ldots, G_k$ *rendre* $m_1, m_2, \ldots, m_k$*-ad fokú faktorai, ha*

(i) ha bármely i,j esetén G_i*-nek ill,* G_j*-nek nincs közös éle,*

(ii) a $G_1, G_2, \ldots, G_k$ *részgráfok együttvéve tartalmazzák G összes élét, akkor G ezen k számú faktor szorzatának mondjuk.*

III. 3. Az utazó ügynök problémája.

Nem negatív élsúlyozott $\left(E(K_n) \xrightarrow{\omega} R_+ \;, \omega(w) \geq 0\right)$ K_n teljes gráfban keresünk minimális súlyú C_H Hamilton kört, azaz $\min\limits_{C_H} \sum\limits_{e \in E(C_H)} \omega(e)$.

A „legközelebbi szomszéd" algoritmus:

1; válasszuk ki K_n tetszőleges x csúcsát. S az x csúcsra illeszkedő élek közül válasszuk egy "e" minimális súlyút.

2; A kiválasztott "e" él másik csúcspontja legyen y jelöljük meg y-t is kiválasztott pontnak. Az y-ra illeszkedő azon élek közül amelyek nem illeszkednek korábban kiválasztott pontra (ill.pontokra) válasszuk egy minimális súlyú e' élt.

3;Ha már minden pontját megjelöltük K_n -nek az algoritmus véget ér K_n – egy súlyozott C_H Hamilton körének megadásával.

A C_H kör függ az x kezdőpont megválasztásától. Az $S(C_H)=\sum_{e\in E(C_H)}\omega(e)$ szám egy ***felső korlátot ad*** az utazó ügynök problémára.

A rendezett élek algoritmusa:

Feltesszük, hogy a K_n élsúlyozott teljes gráf élei súlyúk növekvő sorendje szerint rendezve vannak.

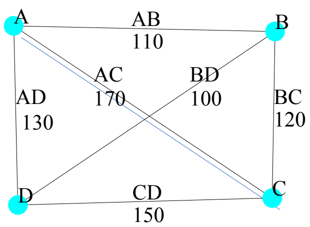
1; Válasszunk $e\in E(K_n)$-t minimális súlyúnak.

2; A ki nem választott élek közül válasszuk $e\in E(K_n)$-t minimális súlyúnak ügyelve arra, hogy egyik végpontja se illeszkedjen olyan pontra,aamelyre már korábban kiválasztott élek közül már kettő illeszkedik és ne alkossanak a kiválasztott élek n csúcspontnál kevesebb pontból álló kört.

3; Ha kiválasztott élek száma n , akkor megkaptuk K_n egy súlyozott C_H Hamilton körét.

Alsó korlátot oly módon nyerhetünk az utazó ügynök problémára, ha észrevesszük, hogy K_n egy minimális súlyú C_H Hamilton körének tetszőleges x pontját törölve a K_n-x gráfnak egy súlyozott feszítőfáját kapjuk.

Keressünk a K_n-x gráfban egy minimális súlyú T feszítőfát (például a Kruskal algoritmussal). T élei súlyának az összegét jelölje S(T), azaz $S(T)=\sum_{e\in E(T)}\omega(e)$. S az x-re illeszkedő élek közül a két legkisebb súlyú legyen e_1,e_2, ekkor $S(C_H)\geq S(T)+\omega(e_1)+\omega(e_2)$. Ez azt jelenti, hogy az $S(T)+\omega(e_1)+\omega(e_2)$ egy <u>alsó korlát</u> az utazó ügynök problémára.



7. ábra

A 7.ábra él-súlyozott G gráfjának AB,BD,BC élei megadják egy minimális súlyú feszítőfáját, s az alsó korlát ekkor k=110+100+120=330. A gráf B csúcsából indulva a legközelebbi szomszéd algoritmus rendre a BD,AD,AC,BC éleket adja, s nyerjük a K=100+130+170+120=520 felső korlátot.

Feladatok:

„Gyakorolj hát és törekedj, mint a régiek, hogy az újat megragadhasd; legfőbb szabályod ez legyen." Kung Fu-ce: Lun-jü: II.könyv 11. fejezet.

1; Igazolja, hogy ha egy élt is tartalmazó G gráf minden pontjának foka páros, akkor kijelölhetők a gráfban körök úgy, hogy a gráf minden éle e körök közül pontosan egyben szerepeljen.

2; Bizonyítsa be, hogy ha az e él az összefüggő G gráfnak hídja, akkor G nem tartalmaz olyan kört, melyben az e él szerepel. (Definíció szerint a G összefüggő gráfnak az e élét hídnak mondjuk, ha e törlésével a G-ből kapott gráf már nem összefüggő.)

3; Bizonyítsa be , hogy ha a G összefüggő gráfnak nincs olyan köre, amely az e élt tartalmazza, akkor e hídja G-nek.

4; Igazolja, hogy ha a G irányított gráf nem üres, és bármely v pontjára $\delta_{be}(v) = \delta_{ki}(v)$, akkor G lefedhető körökkel oly módon, hogy bármely él pontosan egy körben szerepel.

5; Bizonyítsa be, hogy a teljes gráf tetszőleges irányítása mellett létezik olyan v pontja, melyből bármely másik ponthoz vezet legfeljebb kettő hosszúságú út.

6; Mutassa meg hogy bármely G irányított gráfban a csúcsok kifokainak ill. befokainak összege az élek számával egyezik meg.

7; Bizonyítsa be, hogy bármely hidat nem tartalmazó összefüggő G gráf irányítható oly módon, hogy erősen összefüggő legyen. (A G irányított gráf erősen összefüggő, ha bármely pontjából bármely másik pontjába vezet irányított út.)

8; Mutassa meg, hogy igazak az alábbi állítások:

(i) Ha G nem üres gráf , összefüggő és bármely v pontjára $\delta_{be}(v) = \delta_{ki}(v)$ akkor G-nek van irányított Euler-vonala.

(ii) Ha a G nem üres irányított gráfnak van irányított Euler-vonala, akkor G bármely v pontjára $\delta_{be}(v) = \delta_{ki}(v)$ és G összefüggő.

9; Mutassa meg, hogy ha a G gráf nem üres és összefüggő, akkor élei bejárhatók oly módon, hogy minden élen kétszer megyünk végig és vissza térünk a kiindulási pontba. Az élek bejárása úgy is elvégezhető, hogy minden élt mindkét irányban pontosan egyszer járunk be.

10; Legyen a G_1 gráf olyan részgráfja G-nek, mely tartalmazza a G v csúcspontját és G_1 Euler-gráf, feltesszük még, hogy G v-ből tetszőlegesen bejárható. Töröljük G_1 éleit és a visszamaradt izolált pontjait G-nek, a megmaradt gráfot jelölje G_2. Mutassa meg, hogy G_1 és G_2 is v-ből tetszőlegesen bejárható. (A G gráfot v-ből tetszőlegesen bejárhatónak mondjuk, ha v-ből indulva és mindig be nem járt élen haladva szükségképpen G-nek valamely Euler-vonalát kapjuk.)

11; Mutassa meg, hogy ha páros számú utat úgy kapcsolunk össze, hogy kezdőpontjuk u-ra, végpontjuk v-re illeszkedik és u ill. v kívül más közös pontjuk nincs, akkor mind u-ból mind v-ből tetszőlegesen bejárható gráfot kapunk. Mutassa meg, hogy bármely u-ból ill. v-ből tetszőlegesen bejárható G gráf előállítható az előbbi módon.

12; Igazolja, hogy a kettőnél több pontjukból tetszőlegesen bejárható G gráfok körök.

13; Jelölje a G irányított gráf csúcsait rendre $v_0, v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n$, mutassa meg hogy a $\sum_{i=0}^{i=n} \left| \delta_{ki}(v_i) - \delta_{be}(v_i) \right|$ szám páros.

14; Vizsgálja meg, hogy a 4x4-es sakktáblát be lehet e járni egyetlen lóval lóugrásokkal oly módon, hogy mindig olyan mezőre lépünk, melyen korábban még nem jártunk! (Tetszőlegesen választott mezőről indulhatunk.)

15. Végig lehet e járni az 5x5-ös sakktáblát az előbb említett módon?

16. Bizonyítsuk be, hogy ha egy társaságnak bármely tagja ismer a társaságból legalább k embert, akkor közülük leültethető egy kerek asztal mellé legalább k+1 személy oly módon, hogy mindenkinek a két szomszédja ismerőse is egyben. (Feltételezzük, hogy $k \geq 2$ és az ismeretségek kölcsönösek.)

17. Bizonyítsa be, hogy ha az előbbi feladatban említett társaság 6 főből áll és k=3, akkor mind a hatan leültethetők egy asztal mellé az előző feladat feltételeinek megfelelően.

18; Legyen a G gráf csúcspontjainak a száma $n \geq 4$. Mutassa meg, hogy ha az n pontú egyszerű gráfban bármely $((n-1)/2)>k$ pozitív egész k-ra a k-nál nem nagyobb fokú pontok száma kevesebb mint k, akkor a G gráf összefüggő.

19; Mutassa meg ha a egyszerű összefüggő G gráf K körének bármely e élének törlése után a G leghosszabb útját kapjuk, akkor K Hamilton-köre G-nek.

20; Igazolja, hogy ha egy n csúcspontú egyszerű gráf bármely leghosszabb útjának végpontjai fokszámainak összege n, akkor a leghosszabb utak között van olyan, melynek a végpontjai szomszédosak.

21. Mutassa meg, hogy ha valamely sakk versenyen mindenki mindenkivel egyszer mérkőzött, és döntetlen nem volt, akkor a versenyzők sorba rendezhetők oly módon, hogy mindenki győzött az utána következő ellen.

22. Bizonyítsa be hogy a legalább 2 pontú teljes gráfnak bármely irányítása mellet van irányított Hamilton-útja.

23. Irányítsa az 5 szögpontú teljes gráfot oly módon, hogy ne legyen a kapott gráfnak irányított Hamilton-köre!

24. Rajzoljon olyan 6 pontú 11 élű egyszerű gráfot melynek nincs Hamilton-köre.

25; Helyezzen el, az oktaéder minden lapjára egy-egy a lapot pontosan fedő tetraédert. Mutassa meg, hogy az így létre jött test élhálózatából álló gráfnak nincsen sem Hamilton-köre, sem Hamilton-útja.

26; Hány Hamilton-köre van a tetraéder ill. hexaéder (kocka) gráfjának.

27; Ha egy összefüggő gráf nem egyrétűen járható be (tehát legalább négy páratlan fokú csúcsot tartalmaz), akkor legalább két különböző minimális lefedése van. (A lehető legkevesebb vonalból álló lefedéseit egy gráfnak minimális lefedésnek mondjuk,és egy vonal halmaz lefedő, ha a gráf minden élét legalább egyszer tartalmazza .

28; Egy K $2<n$ pontú teljes gráf éleit két színnel pirossal és zölddel színeztük ki. Bizonyítsa be, hogy K-nak lesz olyan k Hamilton-köre, mely egyszínű, vagy legfeljebb két egyszínű ívből áll.(Szorgalmi.)