

Elektrodinamika, optika. A modern fizika elemei.

Vitéz Gábor
Miskolci Egyetem, Fizikai Tanszék

2005. február 24.

– fizvitez@gold.uni-miskolc.hu –

Tartalomjegyzék

1. Elektrosztatika	2
1.1. Az elektrosztatikus mező	5
1.2. Megosztásvektor, az elektromos mező forrásossága.	10
2. Elektrodinamika	21
2.1. Stacionárius áramok	21
2.2. A töltésmegmaradás törvénye	21
2.2.1. Egyenáram munkája, teljesítménye	26
2.3. Az elektromosság és a mágnesség kapcsolata	26
2.3.1. A gerjesztési törvény	27
2.4. A mozgási indukció és vidéke.	29
2.4.1. Mozgási indukció	33
2.5. Időben változó terek	34
2.5.1. A nyugalmi indukció jelensége	34
2.5.2. Általánosított Kirchhoff hurok törvény	37
3. Maxwell egyenletek.	42
3.1. Az EM mező energia mérlege	43
3.2. Elektromágneses hullámok	47
4. Alkalmazásokhoz kapcsolódó részek.	55
4.1. Áram és feszültségmérés	58
4.2. Mérés Wheatstone hídiban	61
4.3. Mérések kompenzátorral	62
4.4. Karakterisztika mérés	63

5. Optika	65
5.1. Geometriai optika	66
6. A modern fizika alapjai	72
6.1. A hullámfüggvény, megtalálási valószínűség.	73
6.2. A foton	76
6.3. Spektrumok típusai	79
6.3.1. A hőmérsékleti sugárzás	80
6.4. A LASER	82
7. A magfizika elemei	88
7.1. A magerők tulajdonságai	89
7.2. Kötési energia, és a tömeghiány	90
7.3. A radioaktivitás	91
7.4. Rádióaktív bomlástípusok	93
8. VIZSGATEMATIKA	98
8.1. 1 k apró kérdés	100

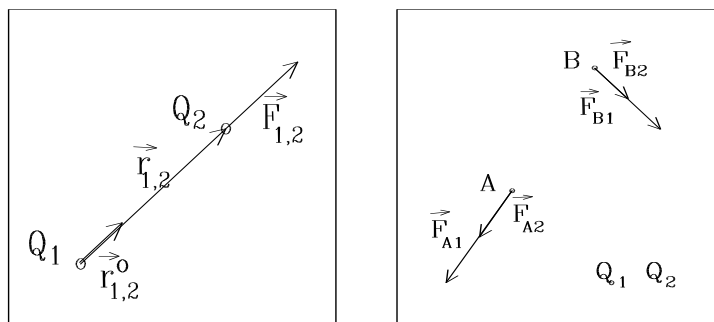
Elektrodinamika, optika

1. Elektrosztatika

Az elektromos jelenségek alapvető forrásáról, az elektromos töltésekről gyakorlatilag semmi érdemlegeset nem tudunk mondani. Azt azonban tudjuk, hogy valamilyen módon módosítják környezetüket, és ez a módosított környezet hatást fejt ki a behelyezett testekre. Ezek a hatások, -elektrosztatikus alapjelenségek- két alapszort valamelyikébe sorolhatók: erőhatások alkotják az egyik csoportot. A jelenségkör névadása is a megfigyelt erőhatás alapján történt, már az ókorban tapasztalták, hogy a megdörzsölt borostyán -görögül elektron- kisebb testeket magához vonzott.

A másik csoportba azon jelenségek tartoznak, amelyekben az elektromos mező az eredetileg elektromosan semleges testeket elektromos tulajdonságokkal ruházza föl. E két jelenségcsoporthal kapcsolatban kvantitatív (számszerűsített) jellemzésre két vektorteret -mezőt- vezetünk be. Az elektrosztatika, mint az általánosabb elektrodinamika bevezető része, leginkább e két, fizikai tulajdonságokkal felruházott mező alaptulajdonságait igyekszik tisztázni.

Különbéféle dörzsöléses kísérletek (ebonitrúd, üvegrúd dörzsölve selyemmel, szőrmével, stb) alapján hamar rájövünk, hogy kétféle elektromos mennyiség létezik, ezen mennyiségek összeadhatók, s a kétféle töltés képes kioltani is egymást. Ezen összegzési tulajdonságok miatt pozitív és negatív töltésekről beszélhetünk. Pusztán véletelennek, és esetlegesnek lehet minősíteni azt, hogy ma melyik töltéstípust nevezzük pozitívnak, és melyiket negatívnak.



1. ábra. Rajzocska a Coulomb törvényhez, valamint a térerősség bevezetéséhez

Az elektromos térerősség és a potenciál.

Amint azt a pontmechanikában tettük, úgy itt is a lehető legegyszerűbb töltéseloszlásokon, pontszerű és álló töltéseken próbáljuk bevezetni az elektromosság legalapvetőbb fogalmait.

Két pontszerű, illetve gömbszimmetrikus töltéseloszlású q_1 és q_2 töltés közötti erőhatást -tapasztalati tények alapján felállított- Coulomb törvénye írja le.

$$\vec{F}_{1,2} = k \frac{q_1 q_2}{r_{1,2}^2} \vec{r}_{1,2}$$

Az erőhatás fordítottan arányos a két töltés közötti távolság négyzetével, s a két pontot összekötő egyenessel párhuzamos. Azonos előjelű töltések taszítják, különböző előjelűek pedig vonzzák egymást. Maga a Coulomb törvény sokban hasonlít a súlyos tömegek között föllépő tömegvonzás törvényére. Látjuk azonban a legalapvetőbb különbséget, nevezetesen -nem lévén negatív tömeg- két tömeg mindig vonzza egymást, a töltések azonban kölcsönös előjeleiktől függően vonzhatják, s taszíthatják is egymást. Különösen tanulságos azonban a két erő intenzitásának összehasonlítása a legegyszerűbb atomban, a hidrogén atomban. Tudjuk, hogy a hidrogén atommagja egyetlen pozitív töltésű proton, s körülötte kering egyetlen elektron. (? „kering” ?.. ezt a képet csak itt, és csak most, és csak öt percig használjuk). E két test között mind a tömegvonzás, mind pedig az elektrosztatikus vonzóerő fellép. Az elemi számítás azt mutatja, hogy ha egységnyinek tekintjük az elektromos vonzóerőt, akkor az egyidejűleg ható tömegvonzási erő úgy néz ki, hogy 0.0000....s kb. a tizedespontot követő negyvenedik nulla után kapnánk az első nullától különböző jegyet. Ez azt jelenti, hogy a tömegvonzás képes ugyan galaxisokat 'összetartani', de az atomi, magfizikai struktúrák kialakításában semmi szerepe nincs.

Az eddig bevezetett mechanikai alapmennyiségeken túl itt megjelent egy nem mechanikai mennyiség, a töltés, illik tehát az egységét valamilyen módon rögzíteni. A töltésegységet, a k arányossági tényező megadásával rögzíthetjük. Közismert, hogy az egység kiválasztása

az emberiség szabad akaratán múlik, s ezt sokan komolyan is vették, így aztán az elektromágnesség területén négy-öt egységrendszer is használatban volt. Ezek egyike pl. a **k**-t dimenziótlannak és egységnyinek választotta. Az azonos töltések között föllépő erő ekkor így írható: $F = q^2/r^2$, amiből $q = r\sqrt{F}$. Elvileg tehát lehetőségünk van a töltésegységet csupa mechanikában használatos egységgel definiálni, amennyiben az erő és a távolság egységeit beírjuk. Az elektromosság mindennapi használata, illetve a használat módja miatt alapszempontként manapság a töltésáramlás egységét jellemző **Amper** (**A**) jelenik meg. Itt a töltésegység **Amper*secundum** vagyis az **As** formában adódik, ennek neve a **Coulomb**, jele pedig a **C**. A nemzetközi egységrendszerbeli (un. **SI**) töltésegység, a $k \cong 9 * 10^9 N * m^2 / (As)^2$ választása esetén adódik, vagyis két darab egymástól egy méter távolságba elhelyezett 1 Coulombnyi pontszerű töltés, $9 * 10^9 N$ erővel vonzza / taszítja egymást. A $k = 1 / (4\pi\epsilon_o)$ formájában ϵ_o a vákuum abszolút dielektromos állandóját jelenti. $\epsilon_o = 8.8541 * 10^{-12} As/Vm$.

Tapasztalati tény az is, hogy a pontszerű töltések között föllépő erő, a két töltés közötti térrészt kitöltő anyag minőségétől is függ, például ugyanazon töltések, ugyanazon geometria mellett pl. olajban kisebb erővel hatnak egymásra, mint levegőben. A közeg ezen tulajdonságát a dimeziótlan ϵ_r relatív dielektromos permeabilitás jellemzi. Ezek használatával a Coulomb törvény alakja a következő:

$$\vec{F}_{1,2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_o\epsilon_r r_{1,2}^2} \vec{r}_{1,2}^o$$

A későbbiekben többször alkalmazzuk az $\epsilon \equiv \epsilon_o\epsilon_r$ egyszerűsített írásmódot.

Ha általánosabb töltéseloszlások elektromos mezőinek **A**, **B** pontjaiba behelyezünk egyszer egy **q1** pontszerű töltést, később egy **q2** töltést, akkor az egyes erők összehasonlítása arra a felismerésre vezet, hogy az erőhatás egy, a töltött testre jellemző skalár és egy, a tér pontjaira jellemző vektormennyiség szorzataként állítható elő: $\vec{F} = q\vec{E}$. Itt **q** a pontszerű töltés töltésmennyiségét, \vec{E} az elektrosztatikus mező térerősségét jellemzi. $\vec{E} = \vec{F}/q$ átírás szerint az elektrosztatikus térerő az egységnyi pozitív, pontszerű töltésre kifejttet erőt jelenti, s \vec{E} a tér pontjaira jellemző mennyiség. Sztatikus esetben tehát $\vec{E}(\vec{r})$ csak a helynek a függvénye, általánosabb esetben az idő is megjelenik benne, mint független változó.

Az elektromos mezőt leíró \vec{E} térerő egysége **N/As**, ehelyett azonban elektromosság-tanban a vele egyenlő **Volt/méter**, vagy rövidebben a **V/m** egységet használjuk.

Az elektromos térerősség értelmezése alapján egy origóba elhelyezett pontszerű **q** töltés elektromos térerősségét a következő függvénnyel adhatjuk meg:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_o\epsilon_r} \frac{\vec{r}_o}{r^2}$$

Itt **ro** a vizsgált térbeli ponthoz mutató helyvektor egységvektora: $\vec{r} = r\vec{r}_o$.

A továbbiakban egy térbeli **P** pontba elhelyezett próbatöltésre egy **Q1** töltés, illetve egy **Q2** töltés által kifejttet erőket vizsgáljuk. Ha a **Q1** töltés **F1** erőt fejt ki **Q2** távollétében és a másik **Q2** töltés pedig **F2**-t **Q1** távollétében, akkor nagy kérdés az, hogy ezek

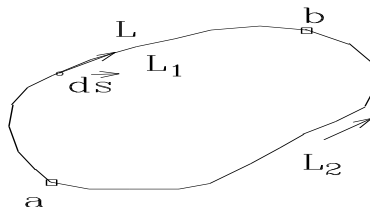
egyidejű hatása megegyezik-e a külön-külön kifejtett erőhatások vektori összegével. Pontosabban: a $Q1$ által P -re kifejtett erőhatást $Q2$ jelenléte nem módosítja-e. Ha a családi életre gondolunk, akkor tudjuk, hogy vannak olyan esetek, amikor annak a bizonyos 'harmadik'-nak a megjelenése az előző kettő kapcsolatát, a kapcsolat intenzitását jelentősen módosíthatja. Ilyen jellegű erők pl. a magerők, azonban az elektromos kölcsönhatások nem módosulnak az újabban megjelenő töltések hatására.

Ha tehát a tér valamely pontjában egy $Q1$ töltésről származó térerősség $E1$, egy $Q2$ töltéstől származó térerősség pedig $E2$, akkor ezek együttes hatása $E=E1+E2$ vektori összeggel adható meg. Ez az elektromos mezők szabad szuperpozícióját jelenti.

Ha van valamilyen töltéssűrűséggel leírt töltéseloszlásunk, akkor az egyes kicsiny térfogatelemekbe zárt töltésmennyiségek -a térfogatelemek méretéhez képest nagy távolságból- ponttöltésként kezelhetők. Ezen pontszerű töltések elektromos mezőjének szuperpozíciójával tehát meglehetősen bonyolult töltéseloszlások elektromos terét is meghatározhatjuk.

1.1. Az elektrosztatikus mező

Tapasztalatunk szerint *az elektrosztatikus mező konzervatív mező. Ez egyébként az elektrosztatika egyik alaptörvénye.* Ennek kísérleti támasza az a megfigyelés, hogy az elektrosztatikus mező által tetszőleges zárt görbe mentén végzett munka nulla. Ennek a ténynek aztán számos következménye van. Mivel mechanikai tanulmányainkban már találkoztunk a konzervatív mezőkkel, és konzervatív tulajdosság különböző megfogalmazásaival, itt csupán átfutjuk őket.



- $\oint_L \vec{E} d\vec{s} = 0$ Az elektromos mező térerősségének tetszőleges, zárt görbére vett görbe menti integrálja nulla. Ugyanezt most elmondanánk fizikául is: az elektrosztatikus mező tetszőleges zárt görbe mentén végzett munkája nulla.
- $\oint_L \dots = \int_{L_1 a}^b \dots + \int_{L_2 b}^a \dots = \int_{L_1 a}^b \dots - \int_{L_2 a}^b \dots = 0 \Rightarrow \int_{L_1 a}^b \dots = \int_{L_2 a}^b \dots$ Az integrandus és az integrációs változó minden integrálban azonos, az egyszerűbb írásmód kedvéért ezeket most nem írjuk ki. Az L zárt görbét a és b -egyébként tetszőleges - pontoknál két, L_1 és L_2 görbére bontjuk. az L_2 görbe irányításának megfordítása az integrál előjelének megváltozásához vezet. Az ebből következő állítás

pedig így hangzik: az elektrosztatikus tér által végzett munkát a kezdő és a végpont egyértelműen meghatározza, nem függ tehát attól, hogy milyen görbeszakasz mentén -milyen úton- megyünk a munkavégzés során a kezdőpontból a végpontba. Ez azt is jelenti, hogy konzervatív mező esetén jogunk van úgy megválasztani az integrációs utat, hogy a számítás a lehető legkényelmesebben elvégezhető legyen.

- $\int_{L_1a}^b \dots = \int_{L_2a}^b \dots = -(U_b - U_a)$ Az a tény, hogy a munkavégzést a kezdő és a végpont egyértelműen meghatározza, arra utal, hogy a munkavégzést a kezdő, és végpontokhoz -általában a tér pontjaihoz- hozzárendelt mennyiségek különbségével adhatjuk meg.
- $\oint_L \vec{E} d\vec{r} = \int_{A(L)} \text{rot}(\vec{E}) d\vec{A} = 0 \Rightarrow \text{rot}(\vec{E}) = 0$ Stokes integrál-trafo alapján a zárt görbementi integrál felületi integrállá alakítható és viszont. Ez ahhoz vezet, hogy tetszőleges felületdarabra a rotáció felületi integrálja nullát ad, amiből következik a konzervatív tulajdonság egy újabb megfogalmazási formája. Ennek a $\text{rot}(\vec{E}) = 0$ formának igen nagy a gyakorlati haszna, ugyanis, ha a mező vektorfüggvényként adott, akkor a **rot** műveletével eldönthető, hogy az adott mező konzervatív-e, vagy sem.
- A fenti tulajdonságok mind automatikusan teljesülnek, ha az elektromos mezőt $\vec{E} = -\text{grad}U$ alakban, azaz egy $U(\vec{r})$ skalárfüggvény negatív gradienseként állítjuk elő. Az U függvényt potenciálfüggvénynek nevezzük. Ebből származik az elektrosztatikus mezőbe helyezett q ponttöltés helyzetéből adódó munkavégzőképessége, a W_{pot} potenciális energia. $W_{pot} = qU$. Ezen kapcsolat az U potenciál, és a W_{pot} potenciális energia között pontos megfelelője az $\vec{F} = q\vec{E}$ kapcsolatnak. Vagyis az elektromos mezőt az U potenciálfüggvény illetve az \vec{E} elektromos térerő jellemzi, a behelyezett aktuális q töltés potenciális energiáját $W_{pot} = qU$ illetve a rá ható erőt az $\vec{F} = q\vec{E}$ adja meg.

Ha megtaláltuk az elektromos mező (egy) U potenciálfüggvényét, akkor minden olyan függvény, amely az U -tól egy additív K állandóban különbözik ugyanazt a fizika teret állítja elő:

$$U'(\vec{r}) = U(\vec{r}) + K \quad \vec{E} = -\text{grad}U' \equiv -\text{grad}U$$

A konstans bármilyen változó szerinti deriváltja ugyanis elhalálozik (nulla lesz).

A tetszőleges konstans hozzáadása a potenciális energiával történő számolásokat sem befolyásolja, ugyanis számításainkban mindig potenciális energia különbségek jelennek meg, így a hozzáadott állandó kiesik. A potenciálfüggvény tehát csak egy additív állandótól eltekintve van egyértelműen meghatározva, így tetszés szerint választhatjuk meg a potenciális energia zérushelyét is.

Ha egy $f(\vec{r})$ függvény \vec{r} független változója $\vec{r} + d\vec{r}$ -re változik, akkor általában a függvényérték is megváltozik. Ezen $f(\vec{r} + d\vec{r}) - f(\vec{r})$ növekmény (sorfejtésből csonkított) lineáris részét az f függvény teljes differenciáljának nevezzük, és df -el jelöljük.

$$f(\vec{r} + d\vec{r}) - f(\vec{r}) = [f(\vec{r}) + \partial f/\partial x * dx + \partial f/\partial y * dy + \partial f/\partial z * dz + \dots +] - f(\vec{r})$$

Csupán a lineáris növekményt megtartva kapjuk a következőket:

$$df = \partial f/\partial x * dx + \partial f/\partial y * dy + \partial f/\partial z * dz = \text{grad}(f) d\vec{r}$$

Mivel az \vec{E} elektromos térerő a töltésegységre ható erőt adja meg, a $d\vec{r}$ elmozdulás során végzett elemi munka az $(\vec{E} = -\text{grad}U) * d\vec{r}$ alapján számítható. Figyelembe véve az előbbieket a $dU = \text{grad}U * d\vec{r}$ alakot kapjuk, így a töltésegységen elkövetett munkavégzés elemi, illetve integrális formája :

$$dU = -\vec{E}d\vec{r} \quad U(\vec{r}) = - \int \vec{E}d\vec{r} \quad (1)$$

A fenti integrál egy népies alkalmazási formáját kapjuk meg homogén elektromos mezőben -pl. síkkondenzátor d távolságban levő lemezei között-, ugyanis ekkor az integrál $\mathbf{E} * d$ alakban számítható. A kondenzátorlemezek U potenciálkülönbsége, és a térerősség kapcsolata tehát $U = \mathbf{E} * d$.

A fent (1) határozatlan integrál integrációs állandóját úgy választjuk meg ahogy az nekünk megfelel. Vannak azonban bizonyos hagyományok, pl. a ponttöltés potenciálja, amelyet a Coulomb törvény alapján az előbbi integrálással kapunk, rendszerint a következő alakban jelenik meg:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r}$$

azaz a ponttöltés potenciálja végtelen távoli pontban válik nullává.

A sztatikus elektromos mező konzervatív voltából következik az össz-energia állandósága ezen térben $W_{\text{kinetikus}} + W_{\text{potencialis}} = \mathbf{állandó}$.

Az elemi munka :

$$\vec{F}d\vec{r} = q\vec{E}d\vec{r} = -d(qU)$$

$$W_{1,2} = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r} = -(qU_2 - qU_1) = -(W_p(2) - W_p(1))$$

A munkatétel azt mondta nekünk, hogy az eredő erő munkája a mozgási energia növekedését adja.

$$(W_k(2) - W_k(1)) = -(W_p(2) - W_p(1))$$

Amely átrendezéssel ahhoz a kijelentéshez vezet, hogy a potenciális és a mozgási energiák összege a mozgás (bármely) két különböző időpontjában ugyanaz az érték. (elektrosztatikus erők hatása alatt).

$$(W_k(2) + W_p(2)) = (W_k(1) + W_p(1))$$

A fentiek egy elemi alkalmazásaként azt határozzuk meg, hogy milyen sebességre tesz szert az m tömegű, $-q$ töltésű, kezdetben nyugalomban levő pontszerű részecske U potenciálkülönbség befutása során. A fentiek aktuális átírata a következő:

$$0 = 1/2m v^2 - qU \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$$

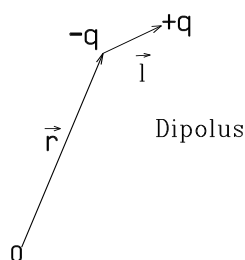
A fenti fejezet az elektrosztatikus mező konzervatív voltát járta körbe. Az elektrosztatikának ez a törvénye még egyenletesen mozgó töltések, de időben állandó mezők - egyenáramok - esetén még fennáll, de időben változó mezők, esetén már nem igaz.

Ha a q töltés U potenciálkülönbséget -feszültséget- fut be, akkor a töltött részecskén az elektromos erők qU munkát végeznek. Ha mindig ugyanarra a töltésre gondolunk, akkor a munkavégzést, illetve a munkavégzés során nyert energiát az U potenciálkülönbséggel is egyértelműen jellemezhetjük. Ezen alapul az atomfizikában, magfizikában, stb. széleskörűen alkalmazott energiaegység, az un. **elektronvolt**, vagy röviden **eV**. 1 eV energiára tesz szert a $q_e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{As}$ (*) elemi töltéssel rendelkező részecske, ha **1 Volt** potenciálkülönbséget fut be. Ha az eV egységben adott energiaértéket az elemi töltéssel megszorozzuk, akkor megkapjuk ugyanazon energia **Joule** egységekben kifejezett értékét.

(*) Tudomásul kell vennünk, hogy az elektromos töltés atomos, szemcsés természetű, azaz van legkisebb, tovább nem osztható mennyisége. Ezt a töltésmennyiséget nevezzük elemi töltésnek, s az anyag egyes elemi alkotórészei a proton, és az elektron - ellentétes előjellel - ekkora töltéssel rendelkeznek. Az elektrodinamika semmit nem tud és nem is mond erről a töltés szemcsészettségéről, egyszerűen minden zavar nélkül együtt tud élni vele.

Elektromos dipólus

Egy nagyon alapvető másik töltés eloszlástípus az un. dipólus (azaz "kétpólus"). Ennek tulajdonságait vizsgáljuk az alábbiakban.



Két ellentétes előjelű, azonos nagyságú töltés egy speciális töltéseloszlást alkot, ezt nevezzük dipólusnak. Ha az l vektor a dipólus negatív töltésétől a pozitív felé mutat, akkor

a dipólus *dipólmomentumát* a következőképpen definiáljuk: $\vec{m} = q\vec{l}$. Pontszerű dipólus ebből úgy lesz, hogy föltsesszük, a két töltés közötti távolság nullához közelít, miközben az m dipólmomentum egy véges értékhez tart. Tehát nem a q töltés és nem az l távolság jellemző a dipólusra, hanem a $q l$ szorzat. Dipólus tulajdonságát az őt alkotó monopólusok, azaz egypólusok (vagyis ponttöltések) tulajdonságaiból építjük föl. Ponttöltés \mathbf{E} elektromos mezőjét, U potenciálterét, és a rá kifejtett \mathbf{F} erőt a következő összefüggések adják:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{\vec{r}_o}{r^2}, \quad U = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r}, \quad \vec{F} = q\vec{E}$$

Az első kifejezésben szereplő \mathbf{E} elektromos mező az origóba elhelyezett ponttöltés elektromos mezőjét írja le. Az utolsóban egy \mathbf{E} elektromos térejejú mezőben elhelyezett ponttöltésre kifejtett erőt kapjuk. (Vagyis a két \mathbf{E} nem ugyanaz).

A pontszerű elektromos dipólus bevezetése két újabb teendőt sugall. Ezek egyike azt tisztázná, hogy ezen speciális töltéseloszlás milyen elektromos mezőt illetve potenciálteret hoz létre. Ezzel részleteiben ugyan nem foglalkozunk, de azt mindenképpen tudnunk kell, hogy amíg a pontszerű elektromos töltés térerőssége a ponttöltéstől mért távolság növekedtével $1/r^2$ szerint tart nullához, az elektromos dipólus keltette térerősség $1/r^3$ szerint csökken. Mivel ez az erő sokkal rohamosabban tart nullához a távolság növekedtével, így ez a rövid hatótávolságú erők közé tartozik.

Az út, amelyen végighaladva meghatározhatnánk egy dipólus potenciálterét, nagyon egyszerű, hiszen a két (+ és -) ponttöltés potenciálját kell összegeznünk, valahogy így:

$$U = U_+ + U_- = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{l}|} - \frac{1}{|\vec{r}|} \right)$$

Tudnunk kell, hogy itt a dipólus negatív ponttöltését helyeztük az origóba, s az \mathbf{r} helyvektor az origóból abba a térbeli pontba mutat, ahol a potenciál értékét keressük. Érdekességek csupán a geometriai részben vannak, ezért csupán azt alakítjuk tovább:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{l}|} - \frac{1}{|\vec{r}|} = \frac{|\vec{r}| - |\vec{r} - \vec{l}|}{|\vec{r} - \vec{l}| |\vec{r}|} \cong \frac{|\vec{r}| - |\vec{r} - \vec{l}|}{r^2}$$

Mivel az l nullához tart, a nevezőben a nagy r mellett az l elhagyható. A számlálóban ez azért nem tehető meg, mert a nagy r , $r-l$ értékek kis különbségében egyedül az l marad valamilyen formában talpon. Azt már ebből az elemi vizsgálatból is látjuk, hogy amíg a ponttöltés potenciálja $1/r$ szerint tart nullához a növekvő r távolság függvényében, a dipólus potenciálja ezt $1/r^2$ szerint teszi. Mint ahogy sötétben minden tehén fekete, úgy nagy távolságból minden töltéseloszlás ponttöltésként kezelhető. Ha pontosabban akarjuk leírni nagy távolságból a töltéseloszlás elektromos terét, vagy ha az össztöltés nulla, akkor töltéseloszlás dipólus terét is figyelembe kell vennünk (azaz szuperponálni a ponttöltés terére). Meg kell jegyeznünk, hogy a sor folytatható magasabb multipólusok terének

figyelembevételével, pontosan olyan módon, ahogy pl. egy Taylor sörfejtésnél az egyre magasabb hatványú tagok figyelembe vétele egyre pontosabb közelítést eredményez.

A másik dolog, amit valamivel részletesebben megnézünk az az, hogy milyen hatást fejt ki az elektromos mező a behelyezett dipólusra. Két hatással kell számolnunk: az elektromos mező forgatónyomatéket fejt ki a dipólusra, „igyekszik” őt beforgatni a térerő irányába. Inhomogén elektromos térrősség esetén a mező erőt fejt ki a dipólusra.

A forgatónyomaték kiszámítása az egyes (mono) -pólusokra kifejtett erőhatás ismeretében történik. Már itt megjegyezzük, hogy az elektromos dipólusra kifejtett erőhatás, és forgatónyomaték kifejezések - a bennük szereplő mennyiségek neveitől eltekintve - egy az egyben átvihetők mágneses dipólusokra is. Ami egyedül nem működik ebben az átírásban az a levezetések alapelve, mivel mágneses töltések -monopólusok- nem léteznek. A dipólusra kifejtett forgatónyomatéket az egyes töltésekre kifejtett forgatónyomatékek összegeként kapjuk. Az iskolában úgy tanultuk, hogy az \mathbf{r} pontban ható \mathbf{F} erő, origóra való nyomatékát az $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ vektorszorzat adja. Ezek alapján az elektromos mező dipólusra kifejtett forgatónyomatéka a következő :

$$\vec{M} = \vec{M}_- + \vec{M}_+ = [\vec{r} \times (-q\vec{E})] + [(\vec{r} + \vec{l}) \times (q\vec{E})] = [\vec{l} \times (q\vec{E})] = [\vec{m} \times \vec{E}]$$

$$F_{xe} = F_{x-} + F_{x+} = -qE_x(\vec{r}) + qE_x(\vec{r} + \vec{l})$$

Az $\mathbf{r} + \mathbf{l}$ helyen jelentkező \mathbf{E}_x térerőt az \mathbf{r} körüli sorfejtés lineáris tagja alapján kapjuk.

$$-E_x(\vec{r}) + E_x(\vec{r} + \vec{l}) \approx -E_x(\vec{r}) + E_x(\vec{r}) + (\partial E_x / \partial x) lx + (\partial E_x / \partial y) ly + (\partial E_x / \partial z) lz + \dots \approx$$

$$\approx \{lx (\partial / \partial x) + ly (\partial / \partial y) + lz (\partial / \partial z)\} E_x = (\vec{l} \nabla) E_x$$

a q -val történő szorzás után -figyelembe véve a dipólus definícióját-kapjuk

$$F_{xe} = (\vec{m} \nabla) E_x \text{ illetve } \vec{F} = (\vec{m} \nabla) \vec{E}$$

Homogén elektromos térben ez az erő eltűnik, ti. a ∇ Nabla operátor ugyanis helykoordináták szerinti valamilyen deriválást jelent. Homogén elektromos mezőben ezen deriváltak nullák, itt csak forgatónyomatéket fejt ki a mező a dipólusra.

1.2. Megosztásvektor, az elektromos mező forrásossága.

Az elektromos mezőben az erőhatásokat az \mathbf{E} elektromos térerősség vektorterével írtuk le. Mint említettük, elektrosztatikus mezőkben az erőhatáson kívül egy másik jelenségkör is megfigyelhető, nevezetesen az, hogy az elektromos mező az eredetileg elektromosan semleges testeket elektromos tulajdonságokkal ruházza föl. Ha vezetőt helyezünk elektromos mezőbe, nagybani - makroszkópikus - töltésszétválasztás jön létre. A jelenséget influenciának, illetve megosztásnak nevezzük. Azokat az anyagokat nevezzük elektromos vezetőknak, amelyekben töltésszállításra, mozgásra képes töltéshordozók vannak. Ilyenek lehetnek diszociált molekulák ionjai oldatokban (pl szózott víz), szabad elektronok -un. delokalizált, atomtörzshöz nem kötött elektronok - pl. fémekben, ionizált atomok, molekulák gázokban,

stb. Szigetelőkben, vákuumban nem találunk töltésszállításra alkalmas részecskéket, bár a legtöbb szigetelő alkalmasan nagy elektromos térerővel vezetővé tehető. Azt a térerősséget, amelynél a szigetelő eleveszti szigetelő tulajdonságát, átütési szilárdságnak nevezzük. Ezen térerőnél és e fölött egy szikraszerű kisülés játszódik le, amely szilárd közegben maradandó roncsolást okoz. Ennek a jelenségnek levegőbeli változata a villámlás, illetve szelídebb változata a fényképezőgépek villanófénye.

Ha szigetelőket teszünk elektromos mezőbe, bennük nagybani töltésszétválasztás nem jöhet létre. Molekuláris méreteken belül azonban -mivel az ellentétes előjelű elektronfelhőre, és az atommagra ellentétes irányú erőt fejt ki a mező, a töltések tömegközéppontjai szétválnak, a molekulából dipólus lett. Ezen dipólusnak a dipólmomentuma az alkalmazott elektromos mező térerősségével arányos, és iránya értelemszerűen az alkalmazott mező irányával egyezik. Ha a molekula már eredetileg is elektromos dipólussal rendelkezett, akkor a dipólusra a külső mező forgatónyomatékat fejt ki, vagyis a külső mező saját irányába igyekszik forgatni a dipólust.

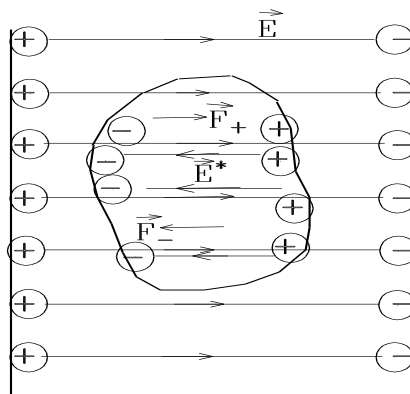
Azt a szót, hogy polarizáció két értelemben is használjuk. A polarizáció jelensége azt jelenti, hogy külső elektromos mező hatására a szigetelőben térfogati dipólussűrűség jelenik meg. Magát a térfogati dipólussűrűséget is polarizációnak nevezzük. Ennek formai definíciója a következő:

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta V} \quad (2)$$

Itt újra azt hangsúlyozzuk, hogy (2) egy formai definíció, amelyet nem szabad szószertint értelmeznünk. A ΔV térfogatelemmel csak olyan kis térfogat értékig mehetünk le, amely térfogatelemben még olyan sok molekula van hogy a térfogatelem kis megváltoztatása hatására a bennfoglalt mennyiség is csak kicsit (és nem szemcsézetten) változik meg.

Ha egy jó vezetőt pl. egy fémdarabot sztatikus elektromos mezőbe helyezünk, akkor abban töltésvándorlás indul meg, s a sztatikus állapot csak később alakul ki. A külső eredetű elektromos mező a fém belsejébe is behatol, s a mozgásra képes töltéshordozókra azok előjelétől függően az elektromos mező irányával megegyező (+ töltésekre F+), illetve azzal ellentétes (- töltésekre F-) erővel hat. Ezen erők hatására a töltések, -előjelűeknek, és az alkalmazott külső elektromos mező irányításának megfelelő - felületrészekén kigyúlnak. (lásd az 2 számú rajzot). A töltések a fémfelületet nem tudják elhagyni, mivel a kilépéshez szükséges un. kilépési munkát az elektromos tér általában nem fedezi. (Igen nagy térerősségek esetén föllép ugyan az un. téremisszió jelensége, -elektronkilépés pusztán az alkalmazott nagy elektromos tér következtében- de most nem ezt a jelenséget vizsgáljuk)

Most már -származásukat tekintve- két elektromos mezőnk van. Az eredeti elektromos mezőnk, és a felületen kigyúlt töltések által keltett másodlagos elektromos mező. Ezen szétválasztott töltések a fém belsejében az eredeti mező irányával ellentétes irányú elektromos teret keltenek. A sztatikus állapot felé tartó folyamat közbeni fázisaiban a fém belsejére a két elektromos mező szuperpozíciójaként (egymásra rakódásaként, vagy egyszerűbben összeadódásaként) az eredeti térerősségtől kisebb térerősség lesz jellemző. Ezen



2. ábra. Az elektromos mezőbe helyezett vezetőkben makroszkopikus töltésszétválasztás játszódik le.

töltésszétválasztási folyamat addig tart, amíg a vezető belsejében az eredő elektromos mező térerőssége nullává nem válik. Ebben az állapotban ismét sztatika van.

Ha a vezető belseje üreges, a végállapot ugyanez, belül nulla elektromos teret kapunk. Ezt a jelenséget takarja az az állítás, hogy az elektrosztatikus tér vezető felületekkel árnyékolható. (Faraday kalitka) Mivel a sztatikus elektromos térerősség a potenciál negatív gradienseként állítható elő, a nulla térerősségű térrész egyúttal állandó potenciálú térrésznek felel meg, vagyis a vezető belseje, és felülete is, sztatikában, ekvipotenciális tartomány, illetve ekvipotenciális felület. Számtanórán tanultuk, hogy egy f skalárfüggvény gradiense a leggyorsabb függvénynövekedés irányába mutat, s egyúttal merőleges az ***f***-***állandó*** felületre. Ugyanez most itt így hangzik: a sztatikus elektromos mező vektora mindig merőleges a vezető felületére.

Ha a testet, amelynek felületén a töltések kigyűltek kettévágjuk, vagy szétválasztjuk (két részből összeillesztett testként tettük be az elektromos mezőbe), akkor két olyan testet kapunk amelyeken ellentétes előjelű, de egyenlő nagyságú elektromos töltés mérhető.

Az elektromos mezőnek ezt a töltésszétválasztó, töltésmegosztó képességét egy vektortérrel jellemezzük, amelyet rendszerint $\vec{D}(\vec{r}, t)$ -vel jelölünk, és elektromos eltolásvektor, elektromos indukcióvektor, illetve elektromos megosztásvektor neveket illetünk. Ha szigetelőnyéllel ellátott, korong alakú két vezetőlapot (két olyan palacsinasütő szerű szerkezetűt) összeszorítva az elektromos térbe tesszük, ott szétválasztjuk, akkor az elektromos térből kivéve megmérhetjük a korongok töltéseit. Egyenlő nagyságú, de ellentétes előjelű töltéseket kapunk. Azt tapasztaljuk, hogy az elektromos mező ugyanazon pontjába, de különböző felületi irányítással betéve e szerkezetet, különböző nagyságú töltéseket kapunk. Kiválasztva a korongoknak azon helyzetét (felületi normális irányítást), amelynél a max-

imális szétválasztott töltésmennyiséget kapjuk, a helyi megosztásvektor értékét ezen maximális töltésmennyiség alapján számított felületi töltéssűrűség számértékével definiáljuk. Ez tehát a Q_{max}/A , ahol A a korong területe. Pontbeli érték ebből akkor lesz, ha a korong felszínével kicsi értékekhez tartunk:

$$\sigma_{max} = \frac{dQ_{max}}{dA} \left[\frac{As}{m^2} \right] \quad |\vec{D}| = \sigma_{max}$$

Így D egysége is As/m^2 . A D vektor irányítását, a maximális töltéshez vezető koronghelyzetben, a pozitív töltésű korong kifelé (nem a negatív töltésű korong felé) mutató felületi normálisa adja meg.

Az **elektrosztatika másik alaptörvénye** az elektromos megosztásvektor tulajdonságait tisztázza. Tapasztalataink szerint e vektortér bármilyen zárt felületre vett zártfelületi integrálja (zártfelületi fluxusa), a zárt felület által határolt térfogatban levő össztöltéssel egyenlő. A sztatika első alaptörvénye kapcsán említettük, hogy időben változó mezőkre a konzervatív tulajdonság már nem áll fenn. E másodikként említett törvény azonban tetszőlegesen változó terekre is fönáll, így az elektrodinamika egyik alaptörvényét jelenti, amely a sztatikában megismert formájában tovább él az elektromágnesség, az elektrodinamika axiómarendszerében amelyeket Maxwell egyenleteknek nevezünk.

$$\oint_A \vec{D} d\vec{A} = \sum_j Q_j$$

A zárt felületen belüli töltések különféle töltéseloszlás típusokból származhatnak:

Ponttöltések lehetnek a térfogatban q_i

Térfogati töltéssűrűség:

$$\rho = \frac{dq}{dv} \left[\frac{As}{m^3} \right] \quad Q_V = \int_V \rho(\vec{r}) dV$$

Felületi töltéssűrűség:

$$\sigma = \frac{dq}{dA} \left[\frac{As}{m^2} \right] \quad Q_{A1} = \int_{A1} \sigma(\vec{r}) dA$$

Vonalmenti töltéssűrűség:

$$\lambda = \frac{dq}{dl} \left[\frac{As}{m} \right] \quad Q_l = \int_l \lambda(l) dl$$

A törvény lokális formájához csupán $\rho(\vec{r})$ térfogati töltéssűrűséget teszünk föl.

$$\oint_A \vec{D} d\vec{A} = \int_{V(A)} \rho(\vec{r}) dV$$

A baloldali zárfelületi integrált Gauss tételével térfogati integrállá alakítható. Ennek átrendezett formája a következő:

$$\int_V (\operatorname{div} \vec{D} - \rho(\vec{r})) dV = 0$$

Az integrál tetszőleges térfogatra akkor ad nulla értéket, ha fennáll:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

Ez az elektrosztatika (és egyúttal az elektrodinamika) második alaptörvényének differenciális megfogalmazása. Azt mondja ki, hogy az elektromos mezők forrásosak, források az elektromos töltések. Kissé lazán, de ide kapcsolódik az elektromos mezők erővonalas szemléltetésének az a szabálya, hogy az erővonalak a pozitív töltésekből indulnak ki, és a negatív töltéseken záródnak.

$$\oint_A \vec{D} d\vec{A} = \sum_j Q_j \qquad \operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

Habár az integrális és a differenciális változatok ugyanazon fizikai tulajdonságot fogalmazzák meg, ezek mégsem egyenértékűek. Az integrális forma általánosabbnak tekinthető mivel bármilyen töltéeloszlás típusból származó töltést -minden formai nehézség nélkül- figyelembe tud venni. A differenciális változat már némi izgalmas matematikai perverzítást igényel ahhoz, hogy pl. a ponttöltéseket mint töltéssűrűségeket adjuk meg.

Polarizáció

A szigetelőket dielektrikumoknak is nevezzük. Ezen anyagokat alkotó molekulák, atomok elektromos dipóljellegéből következő fizikai tulajdonságokkal foglalkozunk.

Egyes kémiai anyagok molekuláiban a pozitív és negatív töltések tömegközéppontja eleve nem esik egybe, így állandó dipólmomentummal rendelkeznek. Az ilyen típusú molekulák legismertebb képviselője a vízmolekula. Külső elektromos mező forgatónyomatéka igyekszik 'beforgatni' ezeket a dipólokat az elektromos mező irányába. Statisztikus mechanikai ismereteink azt mondják, hogy az ekvipartíció szerint a szabadsági fokokra jutó átlagos energia $kT/2$. Az energián való osztozkodás szempontjából tehát egyenjogú partnerek a haladó mozgás (transzláció) és a forgás (rotáció) szabadsági fokai. Ez a hőmérséklettel „arányos forgás” az oka annak, hogy a permanens dipóllal rendelkező anyagokban még ha be is állítottuk volna a dipólusokat 'egy irányba', a 'hőmozgás' forgáshoz kapcsolódó része e rendezettséget rövid időn belül elmosná, s az összevissza mutató dipólmomentumok (vektori) összege végül zérus eredő dipólmomentumot eredményez. Az is világosan látszik, hogy a beforgatás kifejezés csupán üres szóhasználat, talán helyesebb ha azt gondoljuk, hogy a molekulák forgásuk során időátlagban többet töltenek az elektromos mező irányában, mint azzal ellentétes irányban, így az alkalmazott elektromos mező eredő térfogati dipólmomentumot hoz létre.

Ha a molekula töltéeloszlása szimmetrikus, azaz a töltés súlypontok egybeesnek (apoláros molekula), akkor a molekula nem rendelkezik saját elektromos dipólussal. Az alkalmazott

elektromos mező ellentétesen hat a pozitív és negatív töltésekre, vagyis az eredetileg egybeeső töltésközéppontokat széthúzza, így dipólus keletkezik. Ez azonban -a származása a biztosíték rá-, eleve a térrel megegyező irányú.

A kialakuló térfogati \vec{p} dipólsűrűség azaz térfogategység dipólmomentuma (közelítőleg) arányos az alkalmazott elektromos mező intenzitásával. $\vec{p} = \kappa \epsilon_o \vec{E}$. A κ (kappa) dielektrikus szuszceptibilitás (csodaszép szó) a szóbanforgó anyag polarizálhatóságát jellemzi. Nagyobb értéke azt jelenti, hogy ugyanazon \vec{E} térerő nagyobb térfogati dipólmomentumot hoz létre. A fentiekből azt is láthatjuk, hogy a permanens dipóllal rendelkező anyagok polarizálhatósága hőmérsékletfüggő -magasabb hőmérsékleten kisebb a szuszceptibilitás, azaz kevésbé polarizálhatók-, másrészt, ha már 'beforgattuk' a molekulák zömét, akkor a rákövetkező térerő növelés már nem tud újabb molekulákat beforgatni, így az anyag kisebb polarizálhatóságot mutat nagy térerőnél. Ez a telítés jelensége. Ez utóbbi jelenségek -a polarizálhatóság hőmérsékletfüggése, és a telítés jelensége- az apoláros anyagok polarizálhatóságában nem jelentkeznek.

A térerő és a megosztásvektor kapcsolata

———— Folyt. Köv. ————

Vákuumban $\vec{D} = \epsilon_o \vec{E}$

Anyagi közegben $\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_o \vec{E}$

Ebből a vákuum járuléka $\vec{D}_v = \epsilon_o \vec{E}$

Az anyagi közeg járuléka $\vec{D} - \vec{D}_v = (\epsilon_r - 1) \epsilon_o \vec{E}$ ez pedig nem más mint a térfogati dipólsűrűség, a szóbanforgó közeg polarizációja. A szigetelő anyagok relatív dielektrikus állandójának értéke tehát az illető közeg polarizálhatóságával függ össze.

Laplace-Poisson egyenlete

Az elektrosztatika két alaptörvényének összeírása egy alapvetően fontos egyenlethez vezet.

A sztatikus elektromos mező konzervatív voltát számos, -matematikai alakját tekintve különböző - formában fogalmazhatjuk meg. Ezek egyikét használjuk most $\vec{E} = -grad U$

A második alaptörvény differenciális alakja $\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_o \vec{E}$

Ezek összeírása következik:

$$div \vec{D} = \rho \quad -div(\epsilon_r \epsilon_o grad U) = \rho$$

Tartományonként homogén, izotrop dielektrikum esetén az $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_o$ -at kiemelve, valamint mindkét oldalt osztva kapjuk az elektrosztatika Laplace-Poisson (**LP**) egyenletét:

$$\Delta U = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

Ezen Laplace operátor átírásának formai gazdagságát mutatja a következő néhány alak $div grad U = \nabla(\nabla U) = \nabla^2 U = \Delta U$. Descartes koordinátarendszerben ez a következőt jelenti:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon}$$

Ez egy parciális differenciálegyenlet a meghatározandó $U(\vec{r})$ potenciáeloszlás számára. Ismert $\rho(\vec{r})$ töltéeloszlás esetén tehát az **LP** egyenlet teszi lehetővé a meghatározását. Az egyértelmű megoldáshoz a vizsgált tartomány peremeire előírásokat kell tennünk.

Határfeltételek

Az elektrosztatika két alaptörvényéhez jutottunk el. Az egyik a statikus elektromos mező konzervatív tulajdonságát mondja ki. Ezt integrális, és differenciális formában fogalmazhatjuk meg:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{s} = 0 \quad \text{rot} \vec{E} = \vec{0}$$

Ennek következményeként az elektromos mezőt egy skalár potenciál gradienseként állíthatjuk elő: $\vec{E} = -\text{grad}U$. A másik törvény az elektromos mező forrásosságát fogalmazza meg:

$$\oint \vec{D} d\vec{A} = \sum Q_i \quad \text{div} \vec{D} = \rho$$

A két törvény összeírása vezet az elektrosztatika Laplace-Poisson egyenletéhez.:

$$\Delta U = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

Ennek megoldása a vizsgált tartomány peremei mentén előírásokat, un. peremfeltételeket igényel. Ezen peremfeltételeket kívánjuk előállítani. Némileg általánosítva: tisztáznunk kell, hogy bizonyos fizikai mennyiségek milyen szabályokat kötelesek követni két különböző tulajdonságú közeg határfelülete mentén. E szabályok -ha úgy tetszik peremfeltételek- az elektrosztatika alaptörvényeiből vezethetők le.

Elsőként a konzervatív tulajdonságot kifejező integrális formulát alkalmazzuk, amely szerint tetszőleges zárt L görbére $\oint_L \vec{E} d\vec{s} = 0$. Az ábra bal oldalán levő rajzocska jelöléseit alkalmazzuk. Itt egy 1-es és egy 2-es közeget elválasztó határfelületben egy ds ívelemet helyezünk el. Az ívelem a felület P pontjából, a felület Q pontjába mutat. Ezen P és Q pontokat P'' és Q'' pontokként kiemeljük a 2-es közegbe, illetve P' és Q' pontokként az 1-es közegbe. Zárt L görbét kapunk amelynek körüljárása a $P'P''Q''Q'P'$ sorrendnek felel meg. Erre a zárt görbére követjük el az integrált. Az integrál tartomány szerinti additivitása szerint az egyes görbedarabokra elkövetett integrálok összegeként kapjuk a zárt görbementi integrált. Értelemszerűen e görbedarabok a következők: $P'P''$, $P''Q''$, $Q''Q'$, és végül $Q'P'$. Most a következő határátmenetet követjük el:

Visszavisszük P'' -t a felületben levő P -be Q'' -t Q -ba úgy, hogy a $P''Q''$ ívelem is a felület ds íveleméhez közelít azonban mindvégig a 2-es közegben maradva. Ugyanezt elkövetjük az 1-es közegbeli P' , Q' pontokkal. A zárt görbementi integrálból ezen átmenet során nullává válnak a $P'P''$ és a $Q''Q'$ szakaszokra elkövetett integrálok, mivel az integrációs tartományuk zerushoz tart. (az integrandust végig korlátosnak tekintjük) Ami marad az $P''Q''$ illetve a $Q'P'$ ívelemekre elkövetett integrálok. Ezen ívelemek besimulnak a felületbeli ívelembe, így az integrált az eredeti $P''Q''$ ívelem helyett, a PQ Ívelemre végezzük el, megőrizve azonban

az integrandus 2-es közegbeli, határfelületközeli értékét. Amikor Q'P' ívelemről áttérünk a PQ ívelemre, akkor az ellentétes görbeirányítás miatt előjelváltást kell alkalmaznunk. A következők maradtak tehát nekünk:

$$\int \vec{E}_2 d\vec{s} - \int \vec{E}_1 d\vec{s} = 0$$

Egy integrál mögé költöztethetjük mindkettőt. Az E elektromos mező vektorát felírhatjuk a ds irányába eső tangenciális, és arra merőleges (normális) összetevő összegeként: $\vec{E} = \vec{E}_t + \vec{E}_n$. Merőlegesség miatt az $\vec{E}_n d\vec{s}$ skaláris szorzat nullát ad. Mivel az E_t tangenciális összetevő és a ds ívelem párhuzamosak a skaláris szorzás kifejtése egyszerűen a vektorjelek elhagyását jelenti: $\vec{E}_t d\vec{s} = E_t ds$. Ez marad tehát:

$$\int_P^Q (E_{t2} - E_{t1}) ds = 0$$

Mivel az integrál tetszőleges felületbeli Q és P pontok között zérust ad, ebből az integrandus zérus értékére következtethetünk, amiből :

$$E_{t1} = E_{t2}$$

Két közeg határfelülete mentén az elektromos mező tangenciális összetevője folytonosan megy át, vagyis a felület +0 helyen ugyanannyi, mint a felület -0 helyen.

Kövessünk el röptében egy együgyű fizikai alkalmazást : vezetők (pl. fémek) belsejében az elektromos térerő nulla (sztatikában), így a tangenciális összetevő is. Ha ez a felület belső oldalán nulla, akkor köteles a felület külső oldalán is nullának lenni. Ha tehát kívül elektromos mező van, akkor ez csak merőleges lehet. A sztatikus elektromos mező merőleges a vezető felületére.

———— Folyt. Köv. ————

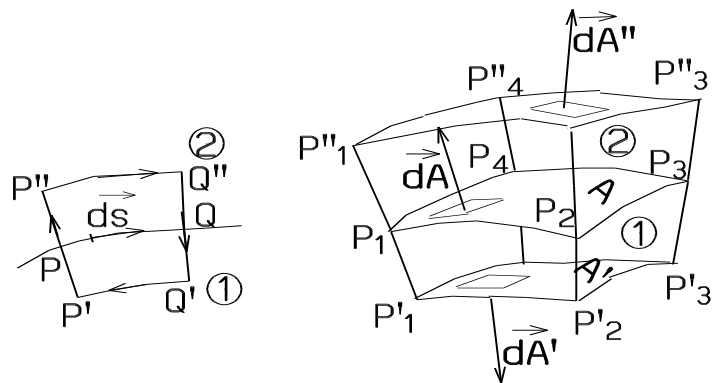
$\oint_L \vec{E} d\vec{s} = 0$ Az 1-es és a 2-es közeget elválasztó határfelületben fekszik a \overline{PQ} ívdarab. Ennek **Q** és **P** végpontjait kiemeljük a **2**-es közegbe is és az **1**-esbe is. Az így kapott hurokra alkalmazzuk a

$$\oint_A \vec{D} d\vec{A} = \sum_j Q_j$$

$$D_{n2} - D_{n1} = \sigma$$

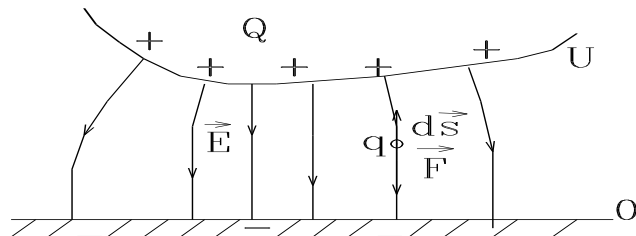
Kapacitás, kondenzátorok

Ha egy vezető testre már fölvittünk valamennyi (mondjuk +) **Q** töltésmennyiséget, akkor a rákövetkező **+q** töltésadag felvitelénél már le kell küzdenünk az eredetileg fönnevő töltések kifejtette elektrosztatikus taszító erőt, azaz valamennyi munkát kell végeznünk a taszító erők ellenében. A sztatikus elektromos mezők konzervatív tulajdonsága következtében e munkavégzés a kiinduló, önkényesen zéruspotenciálú pontnak választott, hely és a töltött



3. ábra. Határfeltételek az elektromos mezőre két közeg határfelülete mentén.

vezető felszínére (és teljes térfogatára) jellemző U potenciál különbségével, azaz az U feszültséggel a következőképpen fejezhető ki: $W = q U$.



Könnyen belátható, hogy ha több Q töltést vittünk föl a vezető testre, akkor a nagyobb taszítóerő következtében több munkát kell végeznünk ugyanazon q töltés fölvitelekor. E munkavégzés a $q \cdot U$ formában számítható. Számunkra itt az a következtetés érdekes, hogy ha már fölvittünk egy vezető testre valamennyi Q töltést, akkor azon a testen valamilyen, a fölvitt töltéssel arányos U potenciál alakul ki. Már a Coulomb törvényénél is észleltük, hogy ugyanazon töltéseloszlás (a töltések és a geometria rögzített) elemei között föllépő erőhatás valahányad részére lecsökken pl. olajban, a levegőben mért erőhatáshoz viszonyítva. A csökkenés mértékét az olaj relatív dielektromos állandója adja meg. Ez persze azt jelenti

a munkavégzés lecsökkenése folytán, hogy ugyanazon töltésmennyiség és geometria esetén a töltött test potenciálja is kisebb lesz, ha a θ potenciálú hely és a töltött test közötti térrészt egy $\epsilon_r > 1$ dielektromos állandójú közeggel töltjük ki.

A fölvitt Q töltés, és a kialakuló U potenciálkülönbség (feszültség) arányossága a következőképpen fejezhető ki $U=Q/C$. Ennek átrendezett formája a $Q=CU$ valamivel szemléletesebb fizikai értelmezést enged meg. Kiolvasható ugyanis, hogy az U potenciálkülönbség mellett a tárolt Q töltés annál nagyobb, minél nagyobb a C értéke, azaz C az elrendezés töltéstároló képességét, töltéstároló kapacitását jellemzi. A C kapacitás egységnyi, ha 1Volt feszültség mellett 1 As -nyi töltést képes tárolni az eszközünk. Ezt az egységet **Faraday** után **1Farad** vagy $1F=1 \text{ As/V}$

Kondenzátoroknak nevezzük azokat az eszközöket, amelyeket kimondottan kapacitásuk miatt használunk áramkörökben. Ezek rendszerint két, egymástól elszigetelt, egymással, szembenálló fémfelületből állanak. Ezeket a fémfelületeket fegyverzeteknek nevezzük. Ha a fegyverzetek között potenciálkülönbség van, akkor a fegyverzetek egymás felé levő felületein felületi töltéseloszlás formájában töltések jelennek meg. Ezek a töltések a fegyverzetekhez vezető kivezetéseken (drótokon) keresztül áramlanak, tehát amikor a kondenzátorokat feltöltjük, akkor áram folyik a kondenzátorhoz vezető drótokban, de a kondenzátor fegyverzetek között nem lépnek át töltések. A kondenzátor össztöltése rendszerint nulla, vagyis az egyik fegyverzeten ugyanannyi negatív töltés van amennyi pozitív a másikon. Ezért amikor azt halljuk, hogy a kondenzátor töltése ennyi, meg annyi, akkor tudnunk kell, hogy ez az egyik fegyverzet töltését jelenti. A kondenzátorok jellemzője a kapacitása, és a megengedett max feszültség. (és még sok más pl átvezetés... veszteség...)

A legegyszerűbb geometriájú kondenzátor két párhuzamos fémlapból áll. A szemben álló felületek nagysága A , a lapok távolsága d . a közöttük levő térrészt ϵ_r relatív dielektromos állandójú közeg tölti ki.

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r A/d$$

Ha a kondenzátoron Q' töltés van, akkor a feszültsége $U=Q'/C$, az újabb dQ' töltés fölviteléhez szükséges munka $dW = „qU” = Q'/C dQ'$. Ennek integrálja adja meg azt a munkát, amelyet egy kezdetben töltetlen kondenzátor feltöltése során végeznünk kell.

$$W = \frac{1}{C} \int_0^Q Q' dQ' = \frac{Q^2}{2C}$$

A kondenzátor töltésének $Q=CU$ alakjának alkalmazása több egyenértékű kifejezéshez vezet:

$$W = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2$$

Ez a munkavégzés során betáplált energia a kondenzátorban tárolódik, és alkalmas körülmények között vissza tudjuk nyerni. Kondenzátorok ezen töltés és energiatároló képességeit számos technikai eszköz hasznosítja.

Az energiát nem a fegyverzeteken kigyűlt töltések, hanem az elektródák közötti elektromos mező tárolja. Ezen mező energiasűrűségét megkaphatjuk, ha a teljes tárolt energiát osztjuk a tárolási térfogattal, amely ebben az esetben $V=A d$.

Az elektromos mező ρ_{we} energiasűrűsége tehát:

$$\rho_{we} = W/Ad = \frac{1}{2}CU^2/Ad = \frac{1}{2}\epsilon_o\epsilon_r \frac{A}{d}(Ed)^2/Ad = \frac{1}{2}\epsilon_o\epsilon_r E^2$$

Itt kihasználtuk, hogy a fegyverzetek közötti homogén elektromos mezőben az elektromos mező térerőssége, és a feszültség között egy egyszerű kapcsolat áll fenn:

$$U = \int \vec{E}d\vec{s} = Ed$$

Az a tény, hogy az elektromos mező kiépítéséhez munkát kell végezni, és ez a végzett munka az elektromos mező energiájában tárolódik, nem kizárólag az elektromos mező sajátja. Mágneses mező, gravitációs mező is ugyanezen tulajdonságokat mutatja.

2. Elektrodinamika

2.1. Stacionárius áramok

Ha az elektromos térbe helyezett testben szabadon mozgó töltéshordozók vannak, akkor a testbe behatoló elektromos mező a test szabadon mozgó töltéseit addig mozgatja, amíg az elektromos mező a test belsejében nullává nem válik. Kémiai (pl. zseblámpaelem), fizikai (pl. dinamó, generátor) eszközökkel el tudjuk érni, hogy az elektromos mező tartósan fennmaradjon. Ehhez a töltéseket mintegy szivattyúznunk kell, azaz a megosztás jelensége során megjelenő töltéseket folyamatosan el kell távolítanunk. Az ehhez szükséges munkavégzést valamilyen külső, ún. beoltott elektromotoros erő végzi.

Ha a vezető közegben állandó elektromos teret tudunk fönntartani, akkor a közegben ennek hatására egy állandósult töltésvándorlás alakul ki. Ezt a töltésvándorlást nevezük elektromos áramnak. Az elektromos töltésvándorlás, az elektromos áram erősségének, intenzitásának számszerű jellemzésére az áramerősséget használjuk. A vizsgált felület teljes keresztmetszetén időegység alatt átáramló töltésmennyiséget nevezük áramerősségnek: $I = dQ/dt$. Egységnyi az áramerősség akkor, ha másodpercenként **1 As**, vagyis **1 Coulomb** folyik át a kiszemelt keresztmetszeten. Ez az áramerősség egység az **Amper**, vagy rövidebben **1 A**. Az áramerősség a teljes keresztmetszeten áthaladó töltésmennyiséget jellemzi, semmit nem mond azonban arról, hogy a vizsgált felület egyes részein a töltéstranszport mennyiben "erősebb", vagy "gyengébb". A töltésáramlás lokális (helyi) jellemzésére alkalmazzuk az elektromos áramsűrűség vektort, amely az áramlás irányára merőleges egységnyi felületen, időegység alatt átáramló töltésmennyiséget adja meg. Egysége az A/m^2 . Az áramsűrűség vektor irányát annak a rögzített nagyságú $d\mathbf{A}$ felületelemnek az irányítása adja, amelyre a $\vec{j}d\mathbf{A}$ áramerősség az adott helyen a legnagyobb értéket adja. Az előbbi definíciók alapján a közöttük levő kapcsolat az alábbi módon fogalmazható meg:

$$I = \int_A \vec{j}d\mathbf{A} \quad (3)$$

Az áramsűrűségvektor a hely és az idő függvénye lehet. Ha az áramerősség időben állandó, akkor ezt az áramot stacionárius, vagy más szóval egyenáramnak nevezjük.

Az elektromos áramhoz más jelenségek is társulnak. Áramátjárta vezető fölmelegszik, esetleg láthatóan fölizzik. Elektrolitokon áthaladó áram kémiai átalakulásokat vált ki. Elektromos áram mágneses mezőt **gerjeszt**, illetve áramátjárta vezetőre a külső mágneses mező erőhatást gyakorol. Ezen hatásokat mindennapi életünkben alkalmazzuk, segítségével árammal kapcsolatos méréseket végezhetünk.

2.2. A töltésmegmaradás törvénye

Tapasztalatink azt mutatják, hogy az elektromos töltés megmaradó extenzív mennyiség. Ez azt jelenti, hogy bármilyen fizikai folyamat során a folyamatban résztvevő anyag össztöltése nem változhat. Tudunk ugyan a nulla össztöltésű anyagból (pl. semleges atomokból)

valamennyi pl. pozitív töltést csinálni (ionizációval, a megosztás jelenségével, különféle dörzsi-börzsi-vel), de ez szükségképpen ugyanannyi negatív töltés gyártásával jár együtt.

Az extenzív mennyiségekre megtanult mérlegegyenlet integrális formája a megmaradó mennyiségekre így fogalmazható meg:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \oint_A \vec{j} d\vec{A}$$

Az áramsűrűség is és a töltéssűrűség is a hely és az idő függvénye, azaz $\rho = \rho(\vec{r}, t)$.

Ez az integrális forma azt mondja, hogy egy V térfogatba foglalt össztöltés mennyisége időegység alatt annyival változik meg, amennyi töltés egységnyi idő alatt a térfogatot határoló zárt felületen (ki/) beáramlik. Integrál-átalakítással jutunk ugyanezen fizikai állítás differenciális megfogalmazásához:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}) = 0$$

E fenti két egyenlet mindegyike a töltésmegmaradást fejezi ki.

Ezen egyenletek egyenáramok esetére speciális formát öltenek, mivel az időderiváltak időben állandósult töltéseloszlásokra nullát szolgáltatnak.

$$\oint_A \vec{j} d\vec{A} = 0 \quad \text{div}(\vec{j}) = 0 \quad (4)$$

A fentiekkel formailag azonos típusú egyenletek a fizika bármely területén azonos következményekhez vezetnek. Ezek a következők:

Kirchhoff csomóponti törvénye: Ennek szöveges változata azt mondja, hogy egy csomópontba befutó áramok (be / ki szerint előjelezett) előjeles összege nulla. A formulírovka:

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0$$

Ez attól van, hogy (4) integrális formájában az integrálási zárt felület egy csomópontot (ahol több drót összefut) vesz körbe. Azt jelenti ez, hogy az integrálási felületet a csomópontba befutó vezető drótok metszik, áramok csak ezen metszési felületdarabokon folynak. A k -adik drót és a zárt felület metszési felületét A_k jelöli, és n darab befutó drótnak megfelelően n db. ilyen felület van.

$$0 = \oint_A \vec{j} d\vec{A} = \sum_{k=1}^n \int_{A_k} \vec{j} d\vec{A}_k = \sum_{k=1}^n I_k$$

A másik következmény a \vec{j} áramsűrűségvektorra ír elő kötelező viselkedésformát két különböző közeget elválasztó határfelület mentén. Az áramsűrűség elválasztó határfelületre merőleges (röviden normál) komponense folytonosan megy át, vagyis:

$$j_{n1} = j_{n2}$$

Az elektromos vezetés, Ohm törvénye.

Azok az anyagok vezetnek az elektromos áramot, amelyekben mozgásra képes töltött részecskék -szabad töltéshordozók- vannak. Ilyenek pl. az oldatok (disszociált molekulák ionjai a töltéshordozók), magas hőmérsékletű ionizált gázok, fémek, ionos anyagok olvadási, de legfőképp a fémek. Fémekben delokalizált elektronok (is) vannak, amelyek nem kötődnek a fém egyetlen ionjához sem. A pozitív ionok a rácspontokhoz kötődnek. A gázatomok „hőmozgásához” hasonlóan az elektronok rendezetlen mozgást végeznek, mely mozgás kiátlagolva nulla áramhoz vezet. Az átlagosan nulla áram azonban csak statisztikusan nulla, ezen érték környezetében fluktuáció - ingadozás - tapasztalható. Az ún. Fermi energia közelébe eső energiájú elektronok külső elektromos mező hatására könnyen megváltoztatják mozgásállapotukat, az elektronok mozgásában megjelenik egy, a kiátlagolás után is megmaradó V_d ún. sodródási, más néven drift sebesség. Ez a drift sebesség az alkalmazott elektromos mező intenzitásával - az elektromos térerősséggel - arányos. Ez a következőből látható be. Fémek esetében, az atomtörzshöz nem kötött (delokalizált) elektronok pozitív ionokkal kibélelt közegben mozognak. E pozitív ionok a rácspontokhoz kötődnek, s ezen pozíció környezetében rezgőmozgást végeznek. A rezgés amplitúdók -gondoljunk az ekvipartíció tételére- a hőmérséklet növekedtével szintén megnövekednek, így növekvő mértékben akadályozzák az elektronok mozgását. Ennek hatása egy, a driftsebességgel - tehát az alapközeghez viszonyított átlagos sebességgel- arányos fékezőerőben nyilvánul meg (ez egyébként a porózus közegekben áramló, szivárgó viszkózus folyadékok viselkedéséhez hasonlít). A tartósan fönntartott elektromos mező hatását is figyelembe véve az mozgásra képes töltött részekre ható kiátlagolt eredő erő a következő:

$$F = q E - k V_d$$

Időben állandósult áramlás esetén az erő nullává válik (gyorsulás nincs), azaz $F=0$. Ebből kapjuk a driftsebesség és az alkalmazott elektromos térerősség kapcsolatát: $V_d = (q/k) E$. A zárójelbe tett mennyiséget mozgékonyágnak nevezzük, és az elektrokémiában fontos szerepet játszik. Jelentése kiolvasható, egységnyi elektromos térerősség hatására bekövetkező drift sebességet adja meg. A fenti összefüggésünkben a k arányossági tényező tehát fémeknél a hőmérséklet növekedtével növekedni fog. Meg kell jegyeznünk, hogy elektrolitokban a folyadék viszkozitása veszi át a „fékezőerő” szerepét. A folyadék viszkozitása (belső sűrűsége) a hőmérséklet növekedtével csökken azaz a k fémeknél tapasztaltakkal ellentétesen viselkedik.

Jelölje n a mozgásra képes töltéshordozók koncentrációját (*darab*)/ m^3 egységben. Ezt a mennyiséget egyébként számsűrűségnek is nevezik. Legyen A a V_d driftsebességre merőleges felület. A kezdetben az A felületen levő elektronok Δt időtartam alatt a felületre merőleges irányba $V_d \Delta t$ távolsággal elmozdultak, vagyis ezen A felületen Δt időtartam alatt átáramlott az alapterület * magasság, azaz $A V_d \Delta t$ térfogatba foglalt összes mozgásra képes töltéshordozó, a töltésével együtt. Az átáramlott össztöltés tehát a következő kifejezéssel adható meg:

$$\Delta Q = A V_d \Delta t n q = n q^2 / k E A \Delta t$$

Figyelembe véve az áramerősség $I = \Delta Q / \Delta t$ definícióját, valamint az áramsűrűség \mathbf{I}/A mezei változatát azt kapjuk, hogy az áramsűrűség, az elektromos mező térerősségével arányos.

$$\mathbf{j} = n q V_d = (n q^2 / k) \mathbf{E}$$

Könnyen megmutatható, hogy a drift sebesség, a \mathbf{j} áramsűrűség-vektor az elektromos mező irányába mutat azaz :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

Ez az Ohm törvény differenciális formája, s azt mondja, hogy alkalmas feltételek mellett a konduktív (azaz a vezetési) áramsűrűség egyenesen arányos az elektromos térerősséggel. A γ arányossági tényezőt vezetőképességnek nevezzük. Gyakran használatos ennek reciproka a fajlagos ellenállás, ezt a görög ρ betűvel szokás jelölni:

$$\rho = 1/\gamma = k/(n * q^2) \quad (5)$$

Tudjuk, hogy a fémes vezetők ellenállása hőmérsékletfüggő, a hőmérséklet növekedésével nő. Egy extrémnek ható, de valójában mindennapos példa: az izzólámpák wolfram szálának ellenállása szobahőmérsékleten az üzemi, (működés közbeni) hőmérsékleten mért ellenállásának közel tizedrésze. Félvezetők (pl. szilícium, germánium), elektrolitok ellenállása a hőmérséklet növekedtével csökken. Nem túl nagy hőmérséklet tartományban a fajlagos ellenállás lineáris hőmérsékletfüggést mutat.

$$\rho(t) = \rho_o(1 + \alpha(t - t_o))$$

Az α [$1/C'$] az un. hőmérsékleti együttható az egy C' hőmérsékletnövekedés hatására bekövetkező relatív ellenállás változást adja meg.

Az ellenállások hőmérsékletfüggését hasznosítják az un. ellenálláshőmérők. Különös előnyük az, hogy az eredetileg nem elektromos mennyiség (hőmérséklet) mérését elektromos mennyiség mérésére vezeti vissza, így számítógépes mérési adatgyűjtéshez könnyen beépíthetők.

Egyes esetekben kívánatos az ellenállások hőmérsékletfüggésének kiküszöbölése. Speciális ötvözeteket fejlesztettek ki ebből a célból. Egy ilyen ötvözet pl. a konstantán (Cu, Ni, Mn ötvözet) melynek α hőm. együtthatója 0.00001 $1/C'$. Összehasonlításként a réz, illetve az alumínium együtthatói 0.0039 illetve 0.0049 $1/C'$.

A hőmérsékletfüggés alapeffektusai (5)-ből kiolvashatók: k , a driftsebességgel arányos fékezőerő együtthatója szilárd vezetőknél a hőmérséklet növekedtével növekszik, elektrolitoknál csökken. Fémeknél ez a faktor tehát a hőmérséklet növekedtével növekvő ellenálláshoz vezet. Néhány vezető közegnél a vezetésben résztvevő töltéshordozók számsűrűsége hőmérsékletfüggő. Fémes, jó vezetők esetében már eleve olyan nagy ez a koncentráció, hogy a hőmérséklet növekedése kapcsán bekövetkező növekmény, már nem jelent ellenállás csökkenést. Más a helyzet félvezetők (alkalmanként elektrolitok) esetében. Ezek az eleve kis töltéshordozó koncentrációjuk miatt gyengébb un. **fél**-vezetők, így a hőmérséklet

növekedtével bekövetkező töltéshordozó szám növekmény jelentős ellenálláscsökkenéshez vezet.

A vezetési mechanizmusnak ezen elemi magyarázata az un. egy komponensű vezetést tette föl, azaz egyféle töltéshordozó jelenlétét. Ionizált gázokban (plazmákban), ionos kristályok olvadékaiban, oldatokban általában pozitív, negatív ionok, alkalmanként különböző ionizációs állapotban (Z) alkotják a mozgásra képes töltéshordozókat. Ilyen esetekben az egyes összetevők áramsűrűségének vektori összege adja az eredő áramsűrűséget.

$$j^+ = n^+ Z^+ q_e^+ V_d^+ = (n^+ Z^{2+} q_e^2 / k^+) E$$

A vezetési áram mellett még fölléphet a konvektív áram is, feltéve, hogy a közeg nem nulla térfogati töltéssűrűséggel is rendelkezik.

Az Ohm törvény általánosabb formája egy beoltott \vec{E}' elektromotoros térerőt is tartalmaz, amely alkalmanként más, (nem fizikai, pl kémiai) eredetű. Ez képes valamely külső energiaforrás rovására munkát végezni a töltéseken, s azokat magasabb potenciálú pontra emelni az alacsonyabb potenciálú pontról.

$$\vec{j}_v = \gamma(\vec{E} + \vec{E}')$$

Rendszerint valójában nem is ismerjük e beoltott elektromotoros térerőt, csak ennek integrálját:

$$U = \int_1^2 \vec{E}' d\vec{s}$$

Amikor a boltban pl. 1.5 Voltos ceruzaelemet veszünk, akkor csupán az elem kivezetései (1 és 2 a fenti integrál határaiban) közötti U potenciálkülönbség (feszültség) az amit ismerünk.

Az Ohm törvény lokális (differenciális) változata, amely szerint az áramsűrűség egyenesen arányos a helyi térerősséggel: $\vec{j} = \gamma \vec{E}$, eredetileg megfigyelések alapján felállított tapasztalati törvény volt. Drótra (amely teljes l hosszában állandó keresztmetszetű, homogén vezető) a drót $d\vec{s}$ íveleme, az \vec{E} térerő, és a \vec{j} áramsűrűség párhuzamosak. Az A keresztmetszet merőleges a $d\vec{s}$ ívelemre, s a \vec{j} a teljes A keresztmetszeten állandó, ekkor $\mathbf{I}=\mathbf{jA}$, $\mathbf{U}=\mathbf{lE}$, és $R = (1/\gamma) * l/A$. Ezek felhasználása vezeti át a differenciális Ohm törvényt a közismert háztartási változatra, azaz az ismert $\mathbf{I}=\mathbf{U}/\mathbf{R}$ összefüggésre. Az R mennyiséget a drót (elektromos) ellenállásának nevezzük. Az elnevezés eredete az összefüggés alapján eléggé nyilvánvaló, ugyanis rögzített U potenciálkülönbség esetén minél nagyobb az R értéke, az átfolyó I áram annál kisebb.

Az Ohm törvény érvényességi köre meglehetősen szűkkörű. Leginkább csak fémekre, és csak kis hőmérséklet tartományban áll fenn egyenes arányosság az áram és a feszültség között. Teljesen más jellegű kapcsolat van az említett mennyiségek között pl. félvezető átmeneteknél (dióda), gázkisüléseknél, stb.

A teljes áramsűrűség a konvektív, a konduktív áramokat is tartalmazhatja. Egyes esetekben a mozgási indukció térerőssége is szerepet játszhat. Generátorokban, ionizált, vezetőképes gázok, (plazmák), olvadékok elektrodinamikájában.

$$\vec{j} = \gamma[\vec{v} \times \vec{B}] + \rho\vec{v} + \vec{j}_v$$

2.2.1. Egyenáram munkája, teljesítménye

Sztatikában azt tapasztaltuk, hogy ha elektrosztatikus mezőben Q töltést U potenciálkülönbségen (feszültségen) viszünk át, akkor az elektromos mező munkája a $W=Q U$ formában számítható. Egyenáram esetén az átvitt töltés és az áramerősség kapcsolata alapján ez így módosul: $W=U I t$. Ezen összefüggés egységeit alkalmazva kapunk egy viszonylag kényelmes átjárot a mechanikai és az elektromos egységek között **1 Joule = 1 Volt Amper sec.** vagy rövidebben **1 J = 1 VA s.**

A munkavégzés sebességét a teljesítmény jellemzi. Egyenáramok esetében (és csak ekkor) a teljesítményt a póriás és közkedvelt formulával számíthatjuk a végzett munkából: $P = W / t = U I$. Ezek alapján egységét a következők adják: $J/s = W = VA$. Időben változó áramok esetében is a $P(t)=U(t) I(t)$ pillanatnyi feszültség és áramértékek szorzata adja meg a teljesítmény pillanatnyi értékét. Itt azonban az időpillanatról, időpillanatra változó teljesítmény helyett valamilyen átlagos értéket szokás használni.

Ez a teljesítmény gyakran mechanikai munka, kémiai átalakulás vagy éppen hő formájában jelentkezhethet. Ha az $U I$ teljesítmény egy A alapterületű, d magasságú ellenállást sütöget, akkor e teljesítmény térfogategységre jutó részét az $(UI)/(Ad)$ művelettel kapjuk meg. Ha minden szép és lyó, azaz az A keresztmetszeten egyenletes az áram eloszlása, az elektromos mező a hengersizű ellenállás magasságvonalával párhuzamos, és a teljes magasságban állandó, akkor a $\vec{j}=I/A$ és az $U=Ed$ összfüggések a következőket adják $(UI)/(Ad)=Ej$

Ezt az Ej [$Watt/m^3$] teljesítménysűrűséget Joule hőnek hívjuk, később, az elektromágneses mező energiámérlegében fontos szerepet játszik.

2.3. Az elektromosság és a mágnesség kapcsolata

Az emberiség régi tapasztalata, hogy egyes vastartalmú ásványok vonzzák, taszítják egymást, sőt elsőként talán a kínaiak arra is rájöttek, hogy a felfüggesztett -nevezzük nevén- mágneses dipólusok mindig ugyanabba az irányba állnak be. \vec{O} volt az iránytű.

Tapasztalatunk az, hogy ezek a permanens (állandó) mágnesek környezetükben egy vektortérrel jellemezhető fizika mezőt, un. mágneses mezőt hoznak létre. Ebbe a mezőbe behelyezett dipólusra a mező forgatónyomatékokot fejt ki. Tapasztalatunk szerint ez az \vec{M} forgatónyomaték a behelyezett "mágnesű" \vec{m} mágneses dipólusával, és a tér pontjait jellemző \vec{H} mágneses térerősséggel a következő kapcsolatban áll:

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{H}$$

A fenti összefüggés elvileg alkalmas a mágneses mező kimérésére. Adott, állandó \mathbf{m} dipolmomentumú mágnes segítségével a vektorszorzat tulajdonságai alapján meghatározhatjuk a mező irányát, irányítását, nagyságát. Ha a tér ugyanabba a pontjába különböző irányításokkal helyezzük be ugyanazt a dipólust, akkora a dipólus irányításától függően különböző forgatónyomatékokat kapunk. A mező irányát a (stabil) nulla forgatónyomatékú dipolmomentum irányítás jelöli ki. Erre merőleges dipóli irányítás mellett mérhetjük a legnagyobb forgatónyomatékot. $M_{max} = m H$. Kétszer - háromszor nagyobb M_{max} forgatónyomaték kétszer-háromszor nagyobb mágneses térerősségnek felel meg. Ha valamely megállapodás alapján rögzítjük a mágneses mező egységét, akkor a fentiek a mágneses mező kimérésére alkalmas eszközt nyújtanak.

Ha egy elektromos dipólust kettéosztunk akkor egy pozitív és egy negatív töltést kapunk. Mágneses dipólusokkal ez nem tehető meg, ugyanis nincsenek mágneses töltések (mágneses monopólusok) csak dipólusok. Mindamellettt némely rajzos demonstrációban, sőt egyes számításokban úgy teszünk mintha léteznének. Az elektromos töltés pozitív, negatív elnevezése helyett itt Északi és Déli pólus elnevezés honosodott meg.

Mivel mágneses töltések nem léteznek, számos olyan jelenség, amely az elektromos töltések kapcsán jelentkezett, a mágneses jelenségek köréből hiányzik. Így az elektromos áram és csatolt részeinek megfelelő jelenségkör teljesen hiányzik a mágnesség területén.

Az elektromos és mágneses jelenségek egyetlen jelenségkört alkotnak, vagyis nem beszélhetünk külön elektromosságról, és külön mágnességről. Sztatikus esetben -de csak ekkor-figyelehtünk meg külön elektromos és külön mágneses jelenségeket. Mivel a továbbiakban gyakran kell használnuk az ' *elektromágneses* ' szót, ennek rövidítéséül az **EM** formát fogjuk használni.

2.3.1. A gerjesztési törvény

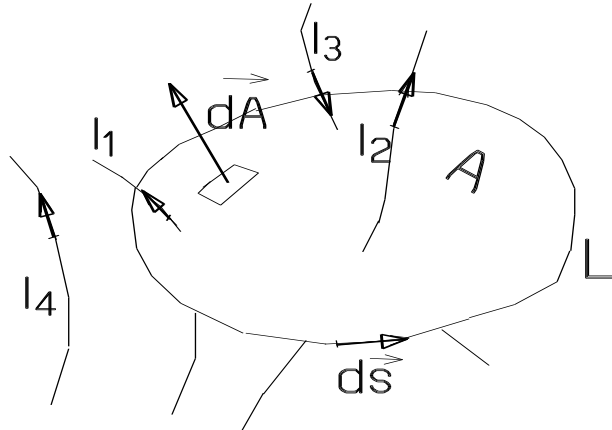
A (4) ábrán a $d\mathbf{s}$ ívelem indukálta felületi normális előjelezi a körülölelt felületen áthaladó áramokat

Tapasztalataink szerint az elektromos áram mágneses mezőt hoz létre -ezt szép szóval úgy fejezték ki, hogy gerjeszt. Ennek alapján tehát a *gerjesztési törvény* az elektromos áram és az általa létrehozott mágneses mező kapcsolatát fogalmazza meg. Két változata van, az eredeti **Ampere** féle amely csak egyenáramokra jó, s a Maxwell által módosított általánosan érvényes forma. Az Ampere féle gerjesztési törvény integrális formája azt mondja ki, hogy a mágneses térerősség *tetszőleges* zárt L görbementi integrálja egyenlő a görbe által körülölelt felületen átfolyó áramok előjeles összegével: Az áramok előjelezése a zárt görbe körüljárási iránya által generált felületi normális irányítása alapján történik .

A gerjesztési törvény Ampere - féle alakja

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{j} \quad \oint_L \vec{H} d\vec{s} = \sum_k I_k$$

Az integrális forma jobboldalát kicsit részleteznünk kell, itt ugyanis az L görbe által körülölelt A jelű felületen átfolyó teljes áram szerepel. Ez az összefüggő felület azonban gyakran szétesik olyan kisebb tartományokra, amelyekben áram folyik, és olyan tar-



4. ábra. A gerjesztési törvény integrális formájához: az L görbe és az általa körülölelt A felület. A ds ívelem által kijelölt körüljárási irány a dA felületelem irányítását generálja

tományokra, amelyeken nem folyik áram. Ilyen pl. az az eset, amikor több drótot (áramhordzó vezeték) tartalmaz az A felület. A felület többi részén áram nem folyik.

$$\int_A \vec{j} d\vec{A} = \sum_k \int_{A_k} \vec{j}_k d\vec{A} = \sum_k I_k$$

Akár az integrális, akár a differenciális formából kiindulva arra jöhetünk rá, hogy a fenti formulák időben változó mennyiségek esetén már helytelen eredményekre vezetnek.

Számítanórán azt tanultuk, hogy bármely vektortér rotációjának divergenciája nulla. Ehhez hasonló állítás ugyan minden konkrét \vec{a} vektorra belátható ($\vec{a} \cdot [\vec{a} \times \vec{F}] = 0$, hiszen a vektorszorzat eredménye a tényezővektorokra merőleges. Így az a tényezővektorok egyikével elkötetett skalárszorzata mindenképpen kihál, a két vektorfajzat ortogonalitása miatt. A Nabla vektorral ugyanezeket az inzultusokat kell elkötetnünk, azonban a fenti okfejtés erre a műveleti utasításra már nem húzható így egyszerűen rá. Némi matematikai testgyakorlás után azonban beláthatjuk, hogy

$$\text{div}(\text{rot}(\vec{H})) \equiv (\nabla \cdot [\nabla \times \vec{H}]) = 0$$

Nos tehát alkalmazzuk ezt a gerjesztési törvényre:

$$\text{div}(\text{rot}(\vec{H})) = /0/ = \text{div}(\vec{j}) \quad \text{vagyis} \quad \text{div}(\vec{j}) = 0$$

Ampere - Maxwell gerjesztési törvény

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \oint_L \vec{H} d\vec{s} = \sum_j I_j + \frac{d}{dt} \int_A \vec{D} d\vec{A}$$

A töltésszállítást leíró \vec{j} áramsűrűséghez hozzá kell adnunk egy, az elektromos mező időbeli változásából adódó tagot. Ezt a tagot is A/m^2 egységekben mérjük, és az egyenletből kiolvasható, hogy a mágneses mező kiépítésében a \vec{j} áramsűrűséggel megegyező szerepet játszik. Ezért ezt a $\partial\vec{D}/\partial t$ tagot is áramsűrűségnek nevezzük, a pontos neve eltolási áramsűrűség vektor. Ez tehát nem ír le töltésszállítást, csupán a mágneses tér létrehozásában viselkedik áramsűrűségként.

Most azt vizsgáljuk, hogy a fizikai feltételektől függően, mikor, melyik áramsűrűség játszik domináns szerepet a mágneses mező létrehozásában.

Időben periódikus, $\vec{E} = \vec{E}_o(\vec{r})e^{i\omega t}$ alakú függvénnyel leírt elektromos mező esetét nézzük. E választást a függvényforma széleskörű előfordulása valamint időderiváltjának könnyű kezelhetősége indokolja. Az Ohm törvény, valamint a \mathbf{D} és az \mathbf{E} kapcsolatát kifejező formula alkalmazásával a gerjesztési törvény jobboldala így írható:

$$\vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = (\gamma + i\omega\epsilon) \vec{E}$$

Ha tehát $\gamma \gg \omega\epsilon$, akkor jó közelítéssel a mágneses tér kiépítésében csak a $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ vezetési áram játszik szerepet. Vagyis elektromosan jól vezető közegben, viszonylag kis frekvencia esetén az eltolási áram szerepe elhanyagolható. Ekkor az 'egyenáramú' gerjesztési törvény alkalmazható.

Az egyenlőtlenség megfordítása, vagyis a $\gamma \ll \omega\epsilon$ feltétel a következő fizikai körülményeket jelenti: szigetelőkben, vagy vákuumban vagyunk, vagy pedig a közeg ugyan nem szigetelő, de az alkalmazott elektromos mező igen szaporán változik. Ekkor válik a jelenség meghatározó tényezőjévé az eltolási áram. Az elektromágneses hullámok létezéséhez is ezen tag megjelenése vezet.

A $(\gamma + i\omega\epsilon)$ tag diszperziót is jelent, azaz vezető közegben az elektromágneses mezők 'viselkedése' frekvenciájuktól is függ. E pillanatnyilag homályos kijelentést az optikai résznél valamivel jobban megvilágítjuk.

Itt, és most szeretnénk fölkelteni az olvasó egészséges gyanakvását, annak kapcsán, hogy az elektromos és a mágneses jelenségek, mezők területén valamilyen zavaros tisztatlanság van. Képzeljünk el egy időben állandó töltéseloszlást, pl. pontszerű töltések sorát. Ezek sztatikus elektromos mezőt hoznak létre. Ha most egyenletes sebességgel elhaladunk a töltések mellett, akkor ezek, a hozzánk rögzített vonatkoztatási rendszerben elektromos áramot képviselnek, amely mágneses mezőt hoz létre. Tehát attól függően, hogy én a megfigyelő állok, vagy a töltésekhez viszonyítva esetleg mozgásban vagyok, tiszta elektrosztatikus, illetve elektromos és mágneses mezőket érzlelek. Úgy tűnik tehát, hogy az elektromos és a mágneses mezők nem is annyira különböző dolgok, azaz valamilyen közös eredetük van.

2.4. A mozgási indukció és vidéke.

Az előbbieken tárgyalt gerjesztési törvény arról adott számot, hogy az elektromos áram, illetve az időben változó elektromos mező hogyan hozza létre a mágneses mezőt. Most a

viszonosság alapján azzal foglalkozunk, hogy a mágneses mező milyen hatást gyakorol az elektromos áramra, illetve az elektromos mezőre milyen hatással van a (az időben változó) mágneses mező. Ebbe a körbe számos, látszólag nem túl közeli jelenség tartozik.

- Már korán felismert tapasztalati tényt fejez ki az ún. Ampere erő, amely a mágneses mezőben levő áramátjárta drótra kifejtett erőt adja meg.

- Mozgási indukció során a mágneses mezőben mozgó testekben elektromos mező jelenik meg. Ennek egy szokásos megfogalmazási formája: mágneses mezőben mozgó vezetőben feszültség indukálódik.

A jelenségkör leírásához egy új mágneses vektorteret (mezőt) használunk, az ún. mágneses indukciótér. Ez a \mathbf{B} amelyet Vs/m^2 egységekben mérünk. Nem túl egészséges ugyan, de e vektortér pontosabb definícióját később, a megfelelő jelenség kapcsán adnánk meg.

Az Ampere erő, és a mozgási indukció tárgyalásához a közös gyökérből, a Lorentz erőből indulunk ki. Ez nem felel meg a jelenség felfedezések időbeli sorrendjének, de jelentősen leegyszerűsíti a megértést.

Mágneses mezőben mozgó töltésre kifejtett erőt az ún. Lorentz erőt a következő kifejezés adja meg: $\vec{F} = q [\vec{V} \times \vec{B}]$

A Lorentz erő teljesítménye 0, tehát nem változtatja meg a mozgó töltés mozgási energiáját, ellenben a mozgás irányát igen.

$$P = \frac{dW_k}{dt} = \vec{F}\vec{V} = q ([\vec{V} \times \vec{B}] \vec{V}) = 0$$

Ugyanis \mathbf{V} skaláris szorzata a \mathbf{V} -re merőleges $[\mathbf{V} \times \mathbf{B}]$ -vel nullát ad.

A töltésgységre ható erőként értelmeztük az elektromos mező térerősségét,

$$\vec{E} = \vec{F}/q = [\vec{V} \times \vec{B}]$$

A \mathbf{B} mágneses indukciójú mezőben \mathbf{V} sebességgel mozgó testek a fenti összefüggés szerint számítható \mathbf{E} elektromos mezőt érzékelnek. Vagyis, ha átdobunk a mágneses mezőn egy szigetelő darabkát, akkor benne ugyanúgy föllép pl. a polarizáció jelensége, mint bármilyen ortodox elektrosztatikus térben. Vegyük azonban észre, hogy a Lorentz erő kapcsán bevezetett térerősség ilyenén értelmezése jelentős lazítás az elektrosztatika meglehetősen feszes térerő definícióján, hiszen itt az erő a test sebességétől függ, és csak a tér azon pontjához rendelhető ezen térerő amelyen éppen a töltött pontszerű test éppen áthalad.

Most azt vizsgáljuk meg, milyen típusú mozgást végeznek a mágneses mezőben mozgó töltött részecskék a Lorentz erő hatása alatt. Legyen a homogén, időben állandó mágneses indukciótér a következő: $\vec{B} = \{0, 0, B_o\}$ E mezőbe lép be egy q töltésű, m tömegű pontszerű részecske a következő kezdősebességgel: $\vec{v}_o = \{0, V_{oy}, V_{oz}\}$ Newton második törvényét alkalmazva, valamint a Lorentz erőt kifejtve a következő mozgásegyenlethez jutunk:

$$\begin{aligned} m\dot{V}_x &= qB_oV_y \\ m\dot{V}_y &= -qB_oV_x \\ m\dot{V}_z &= 0 \end{aligned}$$

Azonnal kiolvashatunk néhány sajátos dolgot. A sebesség mágneses tér irányú összetevője semmilyen szerepet nem játszik az erőben, ugyanakkor a Lorentz erő nem befolyásolja a sebesség mágneses tér irányú összetevőjét.

A részecske z tengely menti mozgása leválasztható, és egyszerűen megoldható. Ránézésre látható, a z tengely mentén egyenletes mozgás történik, az eredeti sebesség z koordinátája nem változik:

$$\frac{dV_z}{dt} = 0 \quad V_z = \text{konst} \quad V_z = V_{oz} \quad z = V_{oz} t + z_o$$

Bevezetjük, egyelőre rövidítésként az $\omega = qB_o/m$ un. ciklotronfrekvenciát. A sebességkoordinátákra a következő csatolt differenciálegyenlet rendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} \dot{V}_x &= \omega V_y \\ \dot{V}_y &= -\omega V_x \end{aligned}$$

A $W = V_x + i V_y$ komplex sebesség bevezetésével a fenti két egyenletet következő egyetlen differenciálegyenletbe gyömöszölhetjük be: $\dot{W} = -i\omega W$. Ez az előbbi egyenletekből következik összeadva a két egyenletet, miután beszoroztuk az imaginárius egységgel az utolsót. Ennek megoldása meglehetősen egyszerű: $W = W_o e^{-i\omega t}$

A W_o komplex amplitudót más alakban megadva a következő formát kapjuk:

$$W = A e^{-i\varphi} e^{-i\omega t} = A e^{-i(\omega t + \varphi)}$$

A fenti összefüggésben A és φ a két integrációs állandó. Fölhasználva a *sin* és *cos* függvények megfelelő párossági tulajdonságait a trigonometrikus forma a következőkhöz vezet:

$$W = A \cos(\omega t + \varphi) - i A \sin(\omega t + \varphi)$$

Azonosítva a komplex sebesség definíciójában a valós, és képzetes részeket a sebességkoordinátákra a következőket kapjuk:

$$V_x = A \cos(\omega t + \varphi) \quad V_y = -A \sin(\omega t + \varphi)$$

Ezek időintegrálja adja az x és y koordináták időfüggését:

$$x = A/\omega \sin(\omega t + \varphi) + K_1 \quad y = A/\omega \cos(\omega t + \varphi) + K_2$$

Átrendezés, négyzetreemelés után kapjuk a következőket:

$$V_x^2 + V_y^2 = A^2 \quad (x - K_1)^2 + (y - K_2)^2 = (A/\omega)^2$$

Kiolvassa ez utóbbi egyenlőségeket látjuk, hogy a mozgás vetülete, a mágneses indukcióra merőleges síkra, egyenletes körmozgás, s mivel a részecske mágneses mező irányú sebessége állandó, e két mozgás együttesen egy állandó menetemelkedésű csavarvonalat eredményez a részecske pályájául. Az $\omega = qB_o/m$ -ként definiált un. ciklotronfrekvencia valójában tehát

szögsebesség. Az ellentétes töltésű részecskék ellentétes irányba végzik a körmozgást. A körmozgást végző töltött részecskék, mint minden gyorsuló töltés, elektromágneses sugárzást bocsátanak ki. Mivel a körmozgás frekvenciája (fordulatszama) a mágneses mező intenzitásától, és a részecskék adataitól függ, ezen ún. ciklotron sugárzás detektálásával távoli csillagok, neutroncsillagok, stb mágneses mezőjéről szerezhetünk információt.

Ismerjük a Földünk mágneses mezőjét. E mágneses mező nyújt védelmet a Napszél, valamint a kozmikus eredetű sugárzás nagyenergiájú töltött részecskéi ellen. A mágneses mező a mágneses erővonalak mentén vezeti el a töltött részecskéket a mágneses pólusok felé. A sarki fény jelensége is innen származik. Mivel a sarkok környékén besűrűsödő erővonalak, mint egy mágneses palack feneke a részecskék egy részét visszafordítja, ezek az északi és déli pólusok között ingáznak az erővonalak mentén leírt csavarvonal pályákon. Nagyrészt ezen ingázó részecskék alkotják az ún. van-Allen sugárzási övezeteket. A Napunk durván 11 évenként - tehát 22-éves periódus idővel - fölcseréli mágneses sarkait. A póluscseré a mágneses tér időszakos, majdnem teljes eltűnésével jár. Ez a jelenség a Föld esetében is jól dokumentált formában - többször is lezajlott. Ezen időszakokban az élővilág a kozmikus sugárzás fokozott expozíciójának van kitéve.

A Földünk mágneses mezője azonban nemcsak az élőlényeket védi, de azzal, hogy a napszél nagysebességű töltött részecskéit (azaz magát a napszelet) távoltartja az atmoszférától, a légkörünket is megvédi a napszél okozta eróziótól. E mágneses védőernyő hiánya esetén a napszél rövid idő alatt lefújná légkörünket a Földről.

Ampererő

Ha egy áramátjárta vezetőt mágneses mezőbe teszünk, akkor azt tapasztaljuk, hogy a mágneses mező erőt fejt ki a vezetőre. Ezt az erőt Ampere erőnek nevezik, s minden napjainkban széles körben alkalmazzuk. Analóg mutatós műszereink, villanymotorok stb. működése alapul e jelenségen. A Lorentz erő ismeretében egyszerű magyarázatot találunk az Ampere erő eredetére.

Az \mathbf{A} keresztmetszetű, $d\mathbf{s}$ hosszúságú vezető darabra kifejtett erőt, a benne mozgó egyes töltött részecskékre kifejtett erők összegeként kapjuk. Ha mozgásra képes töltéshordozók koncentrációja (számsűrűsége) N , akkor a drótdarabka $\mathbf{A} * d\mathbf{s}$ térfogatában $n = N * \mathbf{A} * d\mathbf{s}$ darab a töltéshordozók száma. Ha az egy töltéshordozóra kifejtett erőt megszorozzuk e számmal, akkor a $d\mathbf{s}$ hosszúságú drótdarabra kifejtett eredő erőt kapjuk.

$$\vec{F}_{ds} = n\vec{F}_1 = N A ds q[\vec{V}_d \times \vec{B}]$$

Ennek térfogategységre jutó része (az $\mathbf{A} * d\mathbf{s}$ térfogattal osztunk) a Lorentz erő sűrűsége: $\vec{f} = \vec{j} \times \vec{B}$ amely igen fontos szerepet játszik mágneses mezőben áramló vezető közegek hidrodinamikájának mozgásegyenletében. (**M**agneto-**H**idro-**D**inamika). Itt persze már ismert tényként kezeltük az áramsűrűség $\vec{j} = q N \vec{V}_d$ driftsebességgel kifejezett formáját.

Mivel a töltések nem lépnek ki a drót falán, az áramsűrűség vektor, és a $d\mathbf{s}$ ívelem irányítása megegyezik, mindegy, hogy az irányt kifejező \vec{e} egységvektort melyikhez kapc-

soljuk $ds\vec{V}_d = ds(V_d\vec{e}) = V_d(ds\vec{e}) = V_dd\vec{s}$.

$$\vec{F}_{ds} = qNV_d A [d\vec{s} \times \vec{B}] = I [d\vec{s} \times \vec{B}] \quad (6)$$

Amint az fölismertető, alkalmaztuk az áram, és áramsűrűség között fönnálló elemi kapcsolatot: $\mathbf{I}=\mathbf{jA}$. Az ampererő (6)-es formulájának létezik egy egyszerűsített és közismertebb változata. Ha az l hosszúságú egyenes drót merőleges a homogén mágneses indukció vonalaira, akkor az erre kifejtett erő $\mathbf{F}=\mathbf{B I l}$ mezei formulával adható meg. Ezek a formulák és a hozzájuk kapcsolódó jelenségek elvi lehetőséget nyújtanak a \mathbf{B} mágneses indukció mérésére, sőt definiálására is.

Néhány érdekes jelenség következik az eddigiekből. Két, párhuzamos, hosszú, egyenes vezetőkben $\mathbf{I1}$, és $\mathbf{I2}$ áram folyik. Legyen a drótok távolsága r . Az 1-es drót árama mágneses mezőt 'gerjeszt' a 2-es drót helyén is. Az ehhez tartozó mágneses indukcióterben csordogál az $\mathbf{I2}$ áram, azaz az 1-es drót árama bizonyos mágneses közvetítőkön keresztül erőt fejt ki a 2-es drót áramára. Ha most átmegyünk mutogatós bacsiba, és alkalmazzuk a jobbkéz, dugóhúzó, balláb, jobbcsavar és egyéb szabályokat, akkor arra a fölismérésre jutunk, hogy az egyirányú áramok vonzzák, az ellentétes irányú áramok taszítják egymást. Ez persze nem csupán drótilag elkülönült áramok között lép föl, hanem egyetlen vezető keresztmetszetén kiszemelt áramfonalak között is.

A 2-es drót l -hosszúságú szakaszára kifejtett erő a következők szerint számítható:

$$H = \frac{I_1}{2 * \pi r} \quad B = \mu_o H \quad F_2 = BI_2 l = \mu_o \frac{I_1 I_2 l}{2 * \pi r}$$

2.4.1. Mozgási indukció

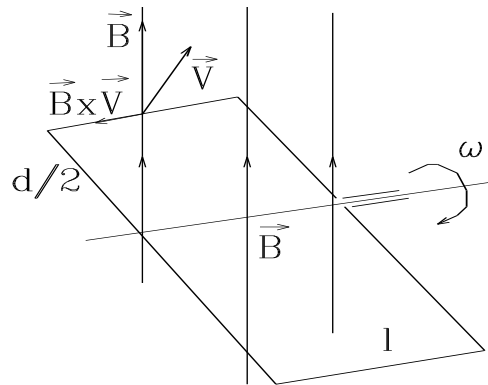
A Lorentz erő $\vec{F}/q = \vec{E} = [\vec{V} \times \vec{B}]$ átrendezésével egy elektromos mező térerősségéhez hasonló mennyiséghez jutunk, amennyiben egységnyi pozitív töltésre ható erőt kapjuk. Látjuk azonban, hogy az eredeti definíció néhány motívuma jelentősen sérülni látszik, hiszen ez a formula nem a tér pontjaihoz hozzárendelt mennyiségről, hanem egy sebességfüggő erőről ad számot. A mozgó vonatkoztatási rendszerben elhelyezkedő tárgyak azonban erről semmit sem tudnak, egyszerűen egy az, előbbi összfüggéssel megadott elektromos mezőt észlelnek, annak összes következményével együtt. Mindenki teszi a dolgát -as usual- a szigetelők polarizálódnak, a vezetőkben töltésszétválás jön létre. E jelenséget mozgási indukciónak nevezzük. Nem csak az elektromos térerőt, de a feszültség fogalmát is átlopjuk ide, amennyiben egy L görbe végpontjai között észlelhető potenciálkülönbséget (U feszültséget) a következőképpen számítjuk:

$$U = \int_L \vec{E}d\vec{s} = \int_l [\vec{V} \times \vec{B}]d\vec{s}$$

Ennek közismert népi változata az $U = \mathbf{B l V}$, amely egy l hosszú \mathbf{B} -re merőlegesen \mathbf{V} sebességgel haladó görbében indukált feszültséget adja meg. Amit itt szemérmesen görbének nevezünk, az rendszerint egy vezető drótdarab, ebben az indukált elektromos mező,

illetve feszültség hatására elektromos áram folyhat. Az eddigiekből egyébként nyilvánvaló, hogy a jelenség során feszültség (és nem áram) indukálódik.

A jelenség egy igen fontos alkalmazása a váltakozóáramú generátor. Ennek elemi modelljéről leolvashatunk néhány alapvető összefüggést. Egy $l \cdot d$ méretű drótkeretet forgatunk B_0 homogén mágneses indukciótérben ω szögsebességgel.



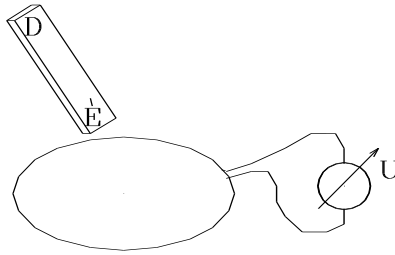
$$U = 2V B_0 l \sin(\alpha)$$

A mozgási indukció jelensége, azt mondta, hogy mágneses mezőben mozgó rendszerben elektromos mezőt észlelünk, a gerjesztési törvényből is kiolvasható egy fordított irányú kapcsolat. Mozdulatlan töltések elektrosztatikus mezőt keltenek. Ha azonban mi ebben a mezőben elhaladunk a töltések mellett, akkor ezek a töltések e mozgó vonatkoztatási rendszerben elektromos áramot képviselnek. A gerjesztési törvény szerint ekkor mágneses mező jelenik meg. Ez azt jelenti, hogy elektrosztatikus mezőben mozogva viszont mágneses mezőt is észlelünk, vagyis igazából nem beszélhetünk külön mágneses és külön elektromos mezőkről. A speciális relativitás elmélete fogja egy csokorba e mezőket.

2.5. Időben változó terek

2.5.1. A nyugalmi indukció jelensége

Többmenetű tekercset készítünk valamilyen vezető anyagú drótból s a tekercs két kivezetésére egy feszültségmérőt kapcsolunk. Ha egy permanens mágnesrudat közelítünk, távolítunk a tekercshez, akkor a mérőeszközünk feszültséget jelez. Ugyanezt tapasztaljuk akkor is, ha ezen tekercs közelébe helyezett másik tekercs áramát változtatjuk.



Fontos az a felismerés, hogy feszültség indukciót csak a (tekercs számára) időben változó mágneses mező esetén tapasztalunk. Mivel az a tekercs, amelyben az indukált feszültség megjelenik, az áll és a mágneses mező változik időben, a jelenséget nyugalmi indukciónak nevezzük. E jelenséggel kapcsolatos tapasztalatokat a következő összefüggések fogják össze:

A \mathbf{B} mágneses indukció \mathbf{A} felületre vett Φ fluxusa alatt a következő felületi integrált értjük: $\Phi = \int_A \vec{B} d\vec{A}$

A vezető hurok végpontjai között indukált (kör-)feszültség: $U_i = \oint_L \vec{E} d\vec{s}$ a fluxus idősz-erinti deriváltjával egyenlő: $U_i = -d\Phi/dt$

Lentz törvénye nem más, mint a fenti összefüggésben szereplő negatív előjelhez fűzött ideológiai körítés. Eszerint az indukált feszültség polaritása olyan, hogy az őt (mármint az indukált feszültséget) létrehozó változást (ez a fluxusváltozás) csökkenteni igyekszik. (lásd még az önindukciónál) A nyugalmi indukció jelenségre vonatkozó törvény differenciális és integrális formái a következők:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \oint_L \vec{E} d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} d\vec{A}$$

Ezek az egyenletek, az elektromágneses mezők axiómáit csokorba foglaló Maxwell egyenletek egy darabkája.

A kölcsönös- és ön- indukció

Ha egy tekercs (mágneses), fluxusa bármilyen okból megváltozik, akkor a tekercsben feszültség indukálódik. Ha két tekercs egyikében \mathbf{I}_1 áram folyik, és ezen áram mágneses mezője a másik tekercsben mágneses fluxust hoz létre, akkor az \mathbf{I}_1 áram időbeli változása a másik tekercsben - a mágneses mező fluxusának változtatásán keresztül- feszültséget indukál. Ezt a jelenséget a kölcsönös indukció jelenségének nevezzük. Azt, hogy az 1-es tekercs árama milyen fluxust hoz létre a 2-es jelű tekercsben, az \mathbf{M}_{21} ún. kölcsönös indukciós együttható adja meg. Ez persze az indukált feszültséget is meghatározza, a fluxus időderiváltján keresztül.

$$\Phi_2 = M_{21} I_1 \quad \Rightarrow \quad U_2 = -M_{21} \frac{dI_1}{dt}$$

A fent elmondottak alapján akár egyoldalú indukciónak nevezhetnénk a jelenséget, kölcsönös indukció azért lesz belőle, mert a két tekercs szerepe fölcserélhető. Sőt itt megjelenik egy, a fizika több területén is szerepet játszó elv az ún. *reciprocitás* elve. (viszonzosság, kölcsönösség, fölcserélhetőség elve). Ez itt azt jelenti, hogy az 1-es tekercs árama ugyanolyan fluxust hoz létre a 2-es tekercsben, mint amilyen fluxust hoz létre az 1-es tekercsben, a 2-es tekercsben folyó ugyanakkora áram. Ezt töményebben is megfogalmazhatjuk: $M_{12}=M_{21}$.

Az önindukció jelensége. Egy tekercsben átfolyó áram mágneses tere mágneses mezőt, s ennek nyomán mágneses indukciófluxust is létesít ugyanazon tekercsben amelyben az áram folyik. Ez a fluxus, ha a tekercs nem tartalmaz ferromágneses vasmagot, egyenesen arányos a tekercs áramával: $\Phi = L I$. Ha a tekercsen átfolyó áram időben változik, akkor az ennek nyomán bekövetkező fluxusváltozás feszültséget indukál ugyanazon tekercsben amelyben az áram folyik.

$$U_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

A jelenséget az önindukció jelenségének nevezzük, s az összefüggésben szereplő, a tekercsre jellemző L mennyiséget pedig önindukciós együtthatónak. Az L mennyiség egysége a fenti összefüggés átrendezéséből kiolvasható. Egységnyi az önindukciós együttható, ha a tekercsben az 1 másodperc alatt 1 Amperrel változó áram 1 Volt feszültséget indukál. Ezt az egységet *Henry*-nek nevezzük: $1 H=1 Vs/A$.

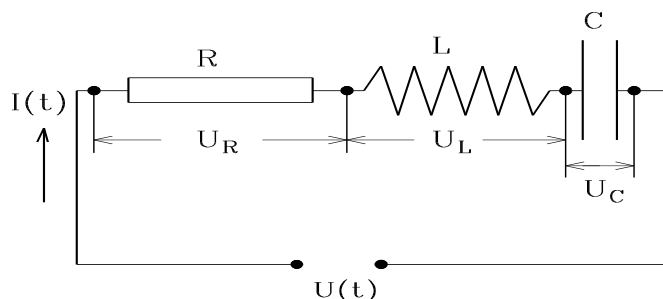
Az összefüggésben szereplő negatív előjel külön, önálló törvényként is ismert. Ezt Lenz törvénynek nevezik, amely szerint az indukált feszültség iránya olyan, hogy akadályozni igyekszik az őt (ti. az indukált feszültséget) létrehozó változást.

Hosszú egyenes tekercs önindukciós együtthatója egyszerűen kiszámolható. Láttuk, egy N menetszámú, l hosszúságú, egyenes tekercsben a mágneses mező intenzitása $H = N I / l$ formulával adható meg. Ezt, a tekercs tengelyével párhuzamos mágneses mezőt a tekercs keresztmetszetén és teljes hosszában homogénnek tesszük föl. A mágneses fluxus eredetileg felületi integrállal definiált számításmódja $\Phi = \int_A \vec{B} d\vec{A}$ most igazán népies formát ölt. $\Phi = N B A$. Teszi pedig mindezt azért, mert a tekercs egy menete által körülölelt A felület felületi normálisa párhuzamos a mágneses indukcióvektorral, -azaz a skal.szor. ban szereplő *cos* értéke mindenütt 1- ugyanakkor a mágneses mező homogenitása miatt a B indukció a teljes felületen ugyanaz az érték. A teljes tekercs fluxusa pedig, egy tekercs fluxusának N -szerese (feltéve, hogy minden menet ugyanazon körüljárási iránynak megfelelően van tekerve azaz minden menet felületi normálisa ugyanabba az irányba mutat).

$$\Phi = N B A = N \mu H A = N \mu (N I / l) A = \left(\mu \frac{N^2 A}{l} \right) I$$

amiből kiolvasható a tekercs önindukciós együtthatója:

$$L = \mu \frac{N^2 A}{l}$$



2.5.2. Általánosított Kirchhoff hurok törvény

Kirchhoff huroktörvényét alkalmazzuk, R ellenállást, L önindukciós együtthatójú tekercset, és egy C kapacitású kondenzátort tartalmazó soros áramkörre.

Nem túl gyorsan változó -un. kvázistacionárius - áramokra

$$\sum_{i=1}^n U_i = \sum_k I_k R_k \quad U(t) - \frac{Q}{C} - L \frac{dI}{dt} = IR$$

Mivel a töltött kondenzátor mint alkalmi, $-Q/C$ pillanatnyi feszültségű feszültségforrás, az L önindukciójú tekercs pedig indukált feszültsége révén, mint $-LdI/dt$ feszültségű feszültségforrás szerepelnek.

$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{Q}{C} = U(t) \quad (7)$$

Figyelembe véve az áram $I=dQ/dt$ definícióját a következő differenciálegyenletet kapjuk:

$$\ddot{Q} + \frac{R}{L} \dot{Q} + \frac{1}{LC} Q = \frac{1}{L} U(t) \quad (8)$$

Tranziens jelenségek

Az előbbi (8) egyenletben, legnagyobb örömünkre ismerőssel találkoztunk. Formája megegyezik a gerjesztett, csillapított rezgőmozgás differenciálegyenletével, így az ott szerzett ismeretek - a fizikai mennyiségek neveitől eltekintve - áthozhatók.

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = \dot{U}$$

Számтанórán tanultuk, hogy a fenti inhomogén egyenletnek I_{alt} általános megoldását a következő alakban (is) megadhatjuk: $I_{alt} = I_{h.alt} + I_{ih.part}$. A homogén egyenlet $I_{h.alt}$

általános megoldása egy $e^{-\beta t}$ szorzót is tartalmaz. E tranziens nullához tartva előbb, vagy utóbb kihal. Mint általános megoldás, ez tartalmazza a kezdeti feltételeket, a rendszer tehát a tranziensek elhalálózásával a kezdeti feltételeit is elfelejti. Ezek lezajlása után az időben állandósult, stacionárius megoldás az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása az $I_{ih,part}$. Amikor pucér váltakozóáramú körokról beszélünk, akkor mindig a tranziensek kihalása utáni stacionárius megoldásra gondolunk, anélkül, hogy a tranziensek elhunytával kapcsolatos heveny lelkiéletünket újraélnénk.

Váltakozó áramok

Mivel egyedüli túlélőként az $I_{ih,part}$ maradt a porondon, a bokájára kötött megkülönböztető szalagocska már feleslegessé is vált, azaz a továbbiakban ő lesz az $\mathbf{I}(t)$ áramerősség. Tudjuk, hogy ha az inhomogenitást jelentő függvény ω körfrekvenciájú periódikus függvény, akkor a partikuláris megoldást is ω körfrekvenciájú periódikus függvény alakjában kereshetjük. A feszültséget $U_o e^{i(\omega t + \varphi)}$ alakban adjuk meg, az áramot $I_o e^{i\omega t}$ alakúnak tekintjük. Az áramot tehát fázisállandó nélkülinek tekintjük. Ezt egyébként jogunkban áll megtenni, mivel csupán azt jelenti, hogy az adott jelenség leírásához időmérésünk mikor indul, azaz a stopperóránk indítógombját mikor nyomjuk le.

A váltakozóáramok komplex írásmódját használjuk, azzal a megállapodással, hogy fizikailag értelmezhető, és mérhető mennyiségeket a komplex mennyiségek valós részei jelentenek. Ez a komplex írásmód, a látszat ellenére, jelentősen egyszerűsíti a formuláinkat. Hogy a továbbiakban könnyedén áttérhessünk az egyik formáról a másikra, néhány közkézen forgó változatot megemlítünk.

$$\hat{U}(t) = U_o e^{i(\omega t + \varphi)} = U_o (\cos(\omega t + \varphi) + i \sin(\omega t + \varphi)) = U_o e^{i\varphi} e^{i\omega t} = \hat{U}_o e^{i\omega t}$$

A összefüggéseinkben a kalapok komplex mennyiségeket jelölnek.

$$\hat{I}(t) = I_o e^{i\omega t} \quad d\hat{I}/dt = i\omega I_o e^{i\omega t} \quad d^2\hat{I}/dt^2 = -\omega^2 I_o e^{i\omega t}$$

A feszültség és az áram megfelelő deriváltjait az inhomogén egyenletbe helyettesítve kapjuk a következőt:

$$-L\omega^2 I_o e^{i\omega t} + i\omega R I_o e^{i\omega t} + \frac{I_o}{C} e^{i\omega t} = i\omega U_o e^{i\varphi} e^{i\omega t}$$

Osztva mindkét oldalt $i\omega$ -val, majd a nevezőből i/i szorzással eltüntetve az imaginárius egységet kapjuk az alábbi formákat:

$$i L\omega I_o e^{i\omega t} + R I_o e^{i\omega t} - i \frac{I_o}{\omega C} e^{i\omega t} = U_o e^{i\varphi} e^{i\omega t} \quad (9)$$

Természetesen az átrendezések mindegyike egy ici-picit mást mond:

$$i L\omega \hat{I}(t) + R \hat{I}(t) - \frac{i}{\omega C} \hat{I}(t) = \hat{U}(t) \quad [i(L\omega - \frac{1}{\omega C}) + R] \hat{I}(t) = \hat{U}(t)$$

Az első formula baloldalán azonosíthatjuk az egyes áramköri elemeken jelentkező feszültségeket, s jobboldalon ezek összegét.

$$\hat{U}_R = R \hat{I} \quad \hat{U}_L = i L \omega \hat{I} \quad \hat{U}_C = -\frac{i}{\omega C} \hat{I} \quad (10)$$

E formulák egyúttal az Ohm törvény komplex alakját is reprezentálják. Ezek mindegyike $\hat{U} = \hat{Z} \hat{I}$ alakú, ahol \hat{Z} jelöli hagyományosan a komplex impedanciát -akarom mondani a komplex váltakozóáramú ellenállást.

$$\hat{Z}_R = R \quad \hat{Z}_L = i \omega L \quad \hat{Z}_C = -\frac{i}{\omega C}$$

Fölismerjük továbbá az eredő komplex ellenállást is, amely a sorbakapcsolt elemek komplex impedanciáinak összege. Ennek az abszolútértékét is megadjuk:

$$\hat{Z}_e = R + i \left(L \omega - \frac{1}{\omega C} \right) \quad Z_o = \sqrt{R^2 + \left(L \omega - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

Ha a (9) egyenletben az $e^{i\omega t}$ -vel egyszerűsítünk, akkor azt látjuk, hogy az eddig elmondottak - pl az Ohm törvény 10 alakjai - nem csak a pillanatnyi értékekre, hanem az amplitúdókra is változatlan formában érvényesek.

A következőkben Ohm törvényének alkalmazását tisztázzuk komplex váltakozóáramú ellenállásokra. Mint minden komplex mennyiség, így a komplex ellenállások is megadhatók a következő alakban: $\hat{Z} = Z_o e^{i\vartheta}$. Ha az áramot választjuk fázisállandó nélkülinek, (azaz $I_o e^{i\omega t}$ alakú) akkor az "U= R I" Ohm törvény a következőkhöz vezet:

$$\hat{U} = Z_o e^{i\vartheta} I_o e^{i\omega t} = Z_o I_o e^{i(\omega t + \vartheta)} = U_o e^{i(\omega t + \vartheta)}$$

Két dolgot látunk, egyrészt a feszültségamplitúdót is Ohm törvénnyel kaptuk $U_o = Z_o I_o$, érdekesebb azonban az, hogy az elektromos feszültség fázisa ϑ értékével nagyobb az áram fázisánál. Az áram és a feszültség tehát nincs (azonos) fázisban, s e fáziskülönbség a komplex váltakozóáramú ellenállás fázisszögétől származik.

A fentieket alkalmazzuk pl. egy L önindukciós együttthatójú tekercsre. Először azonban az imaginárius egység átírását adjuk meg:

$$e^{i\pi/2} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$

$$\hat{Z}_L = i L \omega = L \omega e^{i\pi/2} \quad \hat{U} = \hat{Z} \hat{I} = L \omega I_o e^{i(\omega t + \pi/2)}$$

A feszültségamplitúdó tehát $U_o = L \omega I_o$. Kiolvashatjuk továbbá azt is, hogy az önindukciós tekercsen a feszültség fázisa 90° -al vagyis $\pi/2$ -vel siet az áram fázisához képest. Ha a másik mennyiséget választjuk referenciául akkor ugyanezt a fizikai tényt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az áram késik a feszültséghez képest $\pi/2$ -vel egy önindukciós tekercsen.

Effektív érték

A mérnöki praxisban igen gyakori, hogy egy időben (térben) változó dolgot, vele valamilyen szempontból egyenértékű, időben (térben) állandó mennyiséggel jellemezzük. Egy ilyen állatfajta az un. effektív érték fogalma is. A T periódusidejű, időben változó áram (feszültség) effektív értéke alatt annak az egyenáramnak az áramerősségét értjük, amely ugyanazon ohmikus ellenálláson, ugyanannyi idő alatt ugyanannyi munkát végez mint a váltakozóáram.

Egyenáram teljesítményét, de időben változó áram / feszültség pillanatnyi teljesítményét is a $P = UI = I^2 R$ kifejezés adja meg. Az **I_{eff}** egyenáram, és a váltóáram T idő alatt végzett munkája egyenlő:

$$I_{eff}^2 R T = \int_0^T I^2(t) R dt$$

Ennek átrendezett formája adja az időben változó áram effektív értékét:

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I^2(t) dt}$$

Az integrálás határait lazábban is megadhatjuk. A nullával kezdődő intervallum helyett bármilyen t és $t+T$ közé eső intervallum írható. Ha a kísérletes meghatározásra gondolunk, akkor integrálási tartományként alkalmazhatjuk a T periódusidő egészszámú többszörösét, vagy egyszerűen minden megkötés nélkül olyan nagy időtartamot, hogy a töredékperiódus járuléka a teljes integrálhoz képest elhanyagolhatóan piciny legyen.

Feszültség effektív értékét hasonló összefüggés adja meg mivel a teljesítményt

$$P = U * I = I^2 * R = U^2 / R$$

alakban is megadhatjuk.

Hálózati konnektorunkból (dugaszoló aljzatból) ideális esetben tiszta coszinuszos (szinuszos) delez csorog ki, amely ohmikus terhelésen ugyanolyan fázisú feszültséghez vezet. Ennek effektív értékét határozzuk meg.

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T U^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T U_o^2 \cos^2(\omega t) dt}$$

Tudjuk, hogy $\cos(2\omega t) = \cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t) = 2 \cos^2(\omega t) - 1$ amely alapján a $\cos^2(\omega t) = (1 - \cos(2\omega t))/2$ helyettesítéssel csőre tölthető az utóbbi integrál

$$\int_0^T U_o^2 * (1/2 - \cos(2\omega t)/2) dt = T U_o^2 / 2$$

mivel az integrálás $T = 2\pi/\omega$ határig a cos-ra nullát ad. Az eredményt a gyökjel alá írva kapjuk, hogy:

$$U_{eff} = \frac{U_o}{\sqrt{2}}$$

Háztartási feszültségünk effektív értéke 230 Volt. Ez azt jelenti, hogy ha vasalónkat, izzólámpáinkat, stb. a hálózat helyett 230 Voltos egyenfeszültséggel etetnénk, nem tapasztalnánk különbséget.

Hálózati feszültségünk csúcserőértéke (amplitudója) a fenti összefüggés alapján $U_0=325.3$ Volt. Annyit még feltétlenül illik tudni, hogy a két kivezetés egyike az elvileg zérus potenciálú ún. föld vezeték, a másik kivezetésen (ez a fázisvezeték) jelenik az előbbihez képest -325.3 és $+325.3$ között 50-Hz frekvenciával szinuszosan váltakozó feszültség. A harmadik, ún. védőföldnek zárlatos eszköz esetén életvédelmi funkciója van.

Ha a terhelésünk nem tisztán ohmikus jellegű, akkor a feszültség és az áram között fáziskülönbség (időbeli eltolódás) jelenik meg. A teljesítmény pillanatnyi értékét ekkor is a feszültség és az áram pillanatnyi értéke határozza meg:

$$P(t) = U(i) * I(t) = U_0 I_0 \cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi)$$

Alkalmazásainkban ennek időátlagos értéke fontos, ezt hatásos teljesítménynek nevezzük.

$$P_h = U_0 I_0 \frac{1}{T} \int_0^T \cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi) dt$$

A \cos argumentum összegre vonatkozó kifejtés után kapjuk a következő integrandusht: $\cos^2(\omega t) \cos(\varphi) - \cos(\omega t) \sin(\omega t) \sin(\varphi)$. Az első tag, az effektív értéknél megismert módon szolgáltatja a $T \cos(\varphi)/2$ kifejezést, a második pedig nullát ad (f' f dx alakú azaz ydy-re vezet $y=\cos$ helyettesítéssel, ez pedig 0, 2π , 4π helyeken ugyanazt az értéket veszi föl). Végül formulánk a hatásos teljesítményre

$$P_h = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos(\varphi) = U_{eff} I_{eff} \cos(\varphi)$$

miután a $\sqrt{2}$ -t testvériesen elosztottuk $\sqrt{2}$ -k formájában az I_0 és az U_0 között. Ha a fáziskülönbség nem nulla, akkor $\cos(\varphi) < 1$. Ez az érték egyébként független a fáziskülönbség előjelétől, mivel a \cos páros függvény. Ugyanazon ($\varphi = 0$ -hoz tartozó) teljesítmény létrehozásához nagyobb áramot kell átvezetnünk a hálózaton, annak arányában, hogy a \cos mennyivel kisebb mint 1. A nagyobb áram, a hálózat adott ellenállása miatt a hálózaton jelentkező veszteségeket növeli. Fogyasztóink jelentős (nem ohmikus) része indukcióval rendelkező tekerceket tartalmaznak, ezek hatását gyakran ún. fázisjavító kondenzátorok beiktatásával igyekeznek kompenzálni.

3. Maxwell egyenletek.

Az elektromágnesség terén Ampere, Oersted, Faraday, és mások által begyűjtött kísérleti eredményeket, tapasztalati törvényeket James Clark Maxwell öntötte egységes matematikai formába. Ezek az ún. Maxwell egyenletek képezik az Elektrodinamika axiómáit. Az egyes egyenletek ugyanakkor megőrizték a törvények eredeti felfedezőjének nevét is, így érthető az egyenletek kettős elnevezése.

Az Ampere - Maxwell gerjesztési törvény:

azt fogalmazza meg, hogy az elektromos áram, valamint az időben változó elektromos mező örvényes mágneses mezőt kelt.

<i>Differenciális</i>	<i>Integrális</i>	<i>Sikhullám</i>
$rot \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\oint_L \vec{H} d\vec{s} = \sum_j I_j + \frac{d}{dt} \int_A \vec{D} d\vec{A}$	$-i [\vec{k} \times \vec{H}] = \gamma \vec{E} + i \omega \epsilon_o \vec{E}$

A nyugalmi indukció törvénye:

A törvényt Faraday indukciós törvényének is nevezik. Eszerint időben változó mágneses mező örvényes elektromos mezőt kelt. Ennek integrális változata azt mondja, hogy ha egy A felület mágneses fluxusa időben változik, akkor a felület peremgörbéje mentén feszültség indukálódik.

$rot \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_L \vec{E} d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} d\vec{A}$	$-i [\vec{k} \times \vec{E}] = -i \omega \mu_o \vec{H}$
--	--	---

Az elektromos mező forrásai a töltések:

Gauss törvénye azt állapítja meg, hogy az elektromos mező forrásos, s az elektromos mező forrásai az elektromos töltések.

$div \vec{D} = \rho$	$\oint_A \vec{D} d\vec{A} = \sum_j Q_j$	$-i (\vec{k} \vec{D}) = \rho$
----------------------	---	-------------------------------

A mágneses mező (indukció) forrásmentes, nincsenek mágneses töltések:

Ő Gauss törvénye mágneses mezőre.

$div \vec{B} = 0$	$\oint_A \vec{B} d\vec{A} = 0$	$-i (\vec{k} \vec{B}) = 0$
-------------------	--------------------------------	----------------------------

A síkullám forma eredetét illetően lásd az (23) számú összefüggést, és környékét.

A fentiekhez társulnak még az ún. anyagi egyenletek, amelyek már nem tekinthetők egzakt összefüggéseknek:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \epsilon = \epsilon_r \epsilon_o$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad \mu = \mu_r \mu_o$$

$$\vec{j}_v = \gamma \vec{E} \quad \vec{j} = \gamma[\vec{v} \times \vec{B}] + \rho \vec{v} + \vec{j}_v$$

A továbbiakban $\mathbf{EM} = \mathbf{ElektroMágneses}$ rövidítést alkalmazzuk.

A Maxwell egyenletek egy alapfeladvány típusa adott töltéseloszlások és áramok mellett keresi az elektromos és a mágneses mezőket.

3.1. Az EM mező energia mérlege

A Maxwell egyenletek rendszere is, mint minden más vérbő axiómarendszer, az egyes egyenletek közvetlen fizikai tartalmán túl, számos mögöttes igazságot is magába foglal. Ilyenek az \mathbf{EM} hullámok, vagy éppen a töltésmegmaradás törvénye, amelyet a gerjesztési törvény divergenciája alapján kaphatunk. Ezen fejezetben azonban egy másik mérlegegyenletet vezetünk le a Maxwell egyenletekből, az elektromágneses mező energiájának mérlegegyenletét.

Extenzív mennyiségek mérlegegyenletével a korábbi félévben foglalkoztunk. Említettük, hogy az ott elkövetett levezetés nem levezetés, hanem egy elfogadott tartalmú, szemléletes jelentésű leltárnak adtunk matematika megfogalmazást. Az igazi célja azonban az volt, hogy ha formájában megegyező egyenletet kapunk, akkor boldogan fölkiáltunk, megértvén annak tartalmát, jelentését és jelentőségét.

A könnyebb emészthetőséget elősegítendő, a mérlegegyenlet népiesh változatát újra tálaljuk.

Azt vizsgáljuk, mennyivel, és mi okok miatt változik meg Miskolc határain belül levő emberek száma mondjuk reggel 5 és 10 óra között. Tudjuk, hogy autók, vonatok hozzák, viszik az embereket. Miskolc határai mentén számba lehet venni, mennyien lépnek ki, s be. Egyes határrészekén nagy ember-áramokat tapasztalunk, más helyeken nincs emberáramlás. A ki és belépők nettó összege adja meg a belül levők növekményét. Itt aztán vége is lenne a mesének, és ez szép is lenne, ha érvényes lenne az embermegmaradási törvény. Tudjuk azonban, ez hosszabb távon nem teljesül, vannak nyelőpontok, s vannak források is. Az össznépi játékból kihulló pácienseket eltüntetik az erre kijelölt hivatalos nyelőpontoknál, vannak azonban források is, a szülőszobák. Hozzáadva az így 'keletkezettek' előjeles összegét, a vizsgált tartomány határára keresztül beáramlottak nettó összegével, megkapjuk bennlévők számának pontos növekményét. Arról persze semmit nem tudunk ezek alapján mondani, hogy bent mennyien vannak, csupán a vizsgált időtartam alatti változásról tudunk valamit állítani. Bármilyen meglepő, is a fizika számos bonyolultnak tűnő egyenelete csupán ennyit mond ki valamilyen fizikai mennyiségről, legfeljebb egzaktabb fogalmakat használ. A fent elmondottakat a következő matematikai formában fogalmazhatjuk meg:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \oint_{A(V)} \vec{j} d\vec{A} + \int_V f dV$$

A ρ sűrűség térfogati integrálja adja V térfogatba foglalt össztömeget, ennek időderiváltja adja ezen bennfoglalt össztömeg időegység alatti változását. Megjegyezzük, hogy amíg az extenzív sűrűsége hely és időfüggő, az össztömeg már csak az időtől függ. Az integrálási tartományt merevnek -időben állandónak- tekintjük.

Ez volt tehát a baloldal. A jobboldal második -térfogati - integrálja adja a teljes térfogatban időegység alatt keletkező, és eltűnő mennyiség nettó összegét. \mathbf{f} -et forrassűrűségnek nevezzük, pozitív értékű részeit forrásnak, a negatív előjelűeket nyelőknek becézzük. \mathbf{j} az illető extenzív mennyiségének szállítását írja le, ő az áramsűrűség vektor. Megadja az áramlás irányára merőleges egységnyi felületen időegység alatt átáramló extenzív mennyiségét. Valamely felületre képzett integrálja az adott felületen létrehozott áramerősséget szolgáltatja. Zártfelületi integrálja a teljes felület áramát adja. A kifelé elkövetett áramlás csökkenti a bent levő összmennyiséget, így a kifelé mutató felületi normálisok miatt kell a negatív előjelet alkalmaznunk. A jobboldali két integrál -sorrendben- adja a felületen való ki / be áramlás, a teljes térfogatban a keletkezés / eltűnés járulékait e belül levő mennyiség növekményében.

A továbbiakban tehát hasonló egyenletet kívánunk származtatni a Maxwell egyenletekből kiindulva az \mathbf{EM} mező energiájára. A forma azonossága, és az egyes mennyiségek pozíciója azonosítja majd az egyes mennyiségek fizika jelentését.

Skalárisan szorozva a gerjesztési törvényt kifejező egyenletet $-\mathbf{E}$ vel, a nyugalmi indukció egyenletét pedig \mathbf{H} -val kapjuk a következőket:

$$-\vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} = -\vec{E} \vec{j} - \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} = -\vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Itt persze tudjuk hogy az áramsűrűségvektor egy egész sor áramsűrűségtypust tartalmazhat:

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} + \gamma \vec{E}^* + \gamma \vec{v} \times \vec{B} + \rho \vec{v}$$

A γ elektromos vezetőképességet tartalmazó tagok mindegyike vezetési (konduktív áramot) takar. Különbségek az elektromos mező eredetében vannak. \vec{E}^* az un. beoltott, vagy idegen térerőt jelöli (ilyen működik a zseblámpa elemében, aholis kémiai átalakulásból szerzett energia töltéseket képes 'szivattyúzni'). A $\vec{v} \times \vec{B}$, a Lorentz erő következményeként fellépő térerősség. Szerepe igen jelentős ionizált, vezetőképes gázok, folyadékok mágneses térben történő áramlása esetén (pl Nap, csillagok). Régi ismerősünk a töltés konvektív áramsűrűségét leíró $\rho \vec{v}$. Itt a közeg áramlása során magával cipeli töltését, ennek töltéssűrűsége a ρ .

Az egyenletek összeadása a következőkhöz vezet:

$$\vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} = -\vec{E} (\gamma \vec{E} + \gamma \vec{E}^* + \gamma \vec{v} \times \vec{B} + \rho \vec{v}) \quad (11)$$

Az egyenlet értelmezéséhez néhány definíciót vezetünk be.

Az elektromos mező energiasűrűségét a következő kifejezés adja meg.

$$\rho_e(\vec{r}, t) = 1/2 \vec{D} \vec{E} = 1/2 \epsilon E^2 = 1/2 \epsilon (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2)$$

Itt persze több egyenértékű, jelölésmódjában különböző formát adtunk meg. (anizotrop közegre azért ez nem egészen így igaz). Egysége $As/m^2 * V/m = VAs/m^3 = Joule/m^3$

Ennek időszerinti deriváltja a következő:

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} = 1/2 \epsilon (2 E_x \partial E_x / \partial t + 2 E_y \partial E_y / \partial t + 2 E_z \partial E_z / \partial t) = \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Örömmel ismerjük föl ebben tehát az (11) egyenlet baloldalának első tagját.

Azonos jelentésű mennyiség vezethető be a mágneses mező kapcsán is. Itt már szükségtelen minden lépés részletezése. A mágneses tér energia sűrűsége, és annak időderiváltja a következő:

$$\rho_m(\vec{r}, t) = 1/2 \vec{H} \vec{B} \qquad \frac{\partial \rho_m}{\partial t} = \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Az **EM** mező energiasűrűségén az elektromos, és mágneses mezők energiasűrűségeinek összegét értjük.

$$\rho_{em} = 1/2 \vec{D} \vec{E} + 1/2 \vec{H} \vec{B} \qquad \frac{\partial \rho_{em}}{\partial t} = \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

(11) első két tagjában ezen időderiváltak jelennek meg.

Az $\vec{S}(\vec{r}, t) = \vec{E} \times \vec{H}$ vektort Poynting vektornak nevezzük, s az **EM** mezőben az **EM** energia szállítását írja le. Hivatalos megnevezése szerint \vec{O} az **EM** tér **energia-áramsűrűség-vektora**. Megadja az áramlás irányára (S irányára) merőleges egységnyi felületen, időegység alatt átáramló **EM** energiát. Egysége $V/m * A/m = VA/m^2 = Watt/m^2$. Ezt alkalmanként felületi teljesítménysűrűségnek is titulálják. Egy kiszemelt **A** felületen átáramló **EM** energiát a következő felületi integrállal adhatjuk meg:

$$I = \int_A \vec{S}(\vec{r}, t) d\vec{A}$$

Számтанórán megtanulhatjuk, vagy egyszerűen kézikönyvekből kiolvashatjuk a következő azonosságot: $div[\vec{V}_1 \times \vec{V}_2] \equiv \vec{V}_2 rot \vec{V}_1 - \vec{V}_1 rot \vec{V}_2$, vagyis (11) eddig nem tárgyal tagjai a $div \vec{S}$ kifejezés szét darabolt változatát tartalmazzák. Egybehordva az eddigieket kapjuk:

$$\frac{\partial \rho_{em}}{\partial t} + div \vec{S} = -\gamma \vec{E}^2 - \gamma \vec{E}^* \vec{E} - \gamma \vec{E} [\vec{v} \times \vec{B}] - \rho \vec{E} \vec{v} \qquad (12)$$

Amúgy azonnal föl ismerjük a számtalanszor idézett mérlegegyenletet, melynek integrális formája a következő:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho_{em} dV = - \oint_{A(V)} \vec{S} d\vec{A} + \int_V f dV$$

Ennek jelentését már sokszor felidézttük, most a szóbanforgó témához illő szóhasználatot kell csupán behelyettesítenünk a tartalmilag változatlan mondanivalóhoz.

A baloldal a \mathbf{V} térfogatba foglalt \mathbf{EM} energia változási sebességét, vagy ha úgy tesszük, ezen energia időegység alatti megváltozását fejezi ki. Hogy ezen változások milyen fizikai okok miatt és milyen mértékben következnek be, erről ad számot a jobboldal. A Poynting vektor szállítja az elektromágneses energiát, ennek zártfelületi integrálja adja meg \mathbf{V} térfogatba időegység alatt szállított nettó elektromágneses energiát. A negatív előjel annak következménye, hogy a térfogatot magábazáró zárt felület kifelé szőrös, azaz a normálvektorai a kifelé mutatnak, így a befelé folyó áramok skaláris szorzata a normálvektorral negatív értéket szolgáltatnak. A $-\mathbf{1}$ -el való szorzás helyre állítja lelki békénket, azaz a befelé folyó áramok ezek szerint növelik a benn levő energia mennyiségét.

A fizikai aktualitások a forrásokba és a konduktív áramokba vannak belerakva, ti. a többiek „egy kaptafára” mennek minden extenzív mennyiségre. Most ezek tartalmát és jelentését nézegetjük. Mint azt az extenzív mennyiségek mérlegegyenletének korábbi tárgyalásánál láttuk, a időegység alatt, térfogategységben keletkező extenzív mennyiségét a forrássűrűséggel adjuk meg, pozitív -keletkező mennyiség- esetén forrásról, eltűnő extenzív, azaz negatív forrás esetén nyelőről beszélünk. Esetünkben a forrás alakja a következő:

$$f = -\gamma \vec{E}^2 - \gamma \vec{E}^* \vec{E} - \gamma \vec{E} [\vec{v} \times \vec{B}] - \rho \vec{E} \vec{v} \quad (13)$$

Ezek mindegyike teljesítménysűrűséget ír le, így egységük W/m^3 -ben adható meg. Itt számos ismerőssel találkozunk. Elektrosztatikából tudjuk, hogy a \mathbf{q} ponttöltésre kifejttet erőt a az $\vec{F} = q\vec{E}$ formában írhatjuk föl. Mechanikában tanult ismereteink alapján ezen erő teljesítményét a $P = \vec{F}\vec{v} = q\vec{E}\vec{v}$ alak szolgáltatja. Itt \vec{v} a töltött részecske, illetve térfogatelem sebességvektora. A teljesítmény térfogategységre jutó része a $\rho\vec{E}\vec{v}$ kifejezés. (ρ ebben a térfogati töltéssűrűség) (13) utolsó tagjaként pontosan ezt látjuk de negatív előjellel. Ennek mélyenszántó erkölcsi tartalma van, nevezetesen amikor olyat mondunk, hogy az elektromos mező felgyorsítja a töltött részecskét, \mathbf{qU} munkát végezvén rajta, akkor itt azt látjuk, hogy bizony ezért az elektromos mező saját energiájának csökkenésével fizet. Persze az $-\rho\vec{E}\vec{v}$ aktuális értékének előjele pozitív is lehet amely azt jelenti, hogy a töltött részecske mechanikai energiájának csökkenése az elektromos mező energiáját növeli.

Könnyen azonosítható a $P = UI$ teljesítmény térfogategységre jutó megfelelője, a $-\vec{E}\vec{j}$ az un. Joule hő, ugyanis homogén áramsűrűséget feltéve, az \mathbf{A} keresztmetszetű, l hosszúságú ellenállás térfogategységében a teljesítmény megadható mint

$$P/V = UI/(Al) = (U/l)(I/A) = Ej$$

A $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ Ohm törvény differenciális alakjának alkalmazásával jutunk a következő formához: $-\vec{E}\vec{j} = -\gamma\vec{E}^2$. A $-\gamma\vec{E}^2$ mindig negatív értéket szolgáltat, azaz a Joule hő csökkenti az \mathbf{EM} mező energiáját, viszont ettől világít az izzólámpa, s ettől meleg a vasaló. Ugyancsak ezen Joule hő, azaz a vezetés jelensége kapcsán eltüntetett \mathbf{EM} energia rovására írható, hogy jó vezető anyagokon nem hatolnak át az \mathbf{EM} hullámok, így például nem látunk át egy alumínium lemezen. (De akkor miért látunk át vezető elektrolitokon, és miért nem megy át a fény például egy darab téglán?)

A beoltott, vagy idegen térerő teljesítménysűrűségét írja le a $-\gamma \vec{E}^* \vec{E}$ kifejezés. Zseblámpaelem, vagy akkumulátor tartósan képes termelni **EM** energiát, illetve pl akkumulátor töltésekor elnyelni. Ezen említett jelenségekben kémiai átalakulások termelik, illetve nyelik el az energiát.

Energiát termelhetünk a $-\gamma \vec{E} [\vec{v} \times \vec{B}]$ kifejezés alapján akár ipari méretekben is. Bizonyára emlékszünk arra, hogy ezen tag a Lorentz erő nyomán értelmezett mozgási indukcióról ad számot. Ezek szerint generátorok mágneses térben mindenféle dróttekerceket forgatva mechanikai munkát válthatunk át **EM** energiává. Nem kizárt azonban, hogy gyakoribb megoldás az, hogy a tekercsek állnak, és a mágnesek forognak. Érdekes felhívni a figyelmet arra, hogy a mágneses mezőben mozgó vezető közegekkel kapcsolatos jelenségek alapvető fontosságúak a csillagok életében.

3.2. Elektromágneses hullámok

A Maxwell egyenletek csatolt, parciális differenciálegyenletek az elektromos és a mágneses mezőkre. Némi átalakítással azonban olyan egyenletekhez juthatunk, amelyek csupán az elektromos, vagy csak a mágneses terekre vonatkoznak.

Homogén, izotrop, töltésmentes közegben vizsgálódunk. Kiindulásul ugyan vezető közeget is megengedünk, de részletesebb számolásokat csupán szigetelőkre követünk el. Az eddig elmondottak a következőket rögzítik:

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

$$\text{div} \vec{D} = \rho \quad \Rightarrow \quad \text{div}(\epsilon_r \epsilon_o \vec{E}) = \rho \quad \Rightarrow \quad \epsilon_r \epsilon_o \text{div} \vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{div} \vec{E} = 0 \quad (14)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{div}(\mu_o \mu_r \vec{H}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{div} \vec{H} = 0 \quad (15)$$

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \text{rot} \vec{H} = \gamma \vec{E} + \epsilon_r \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (16)$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \text{rot} \vec{E} = -\mu_o \mu_r \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (17)$$

Az utolsó egyenlet rotációját képezzük.

$$\text{rot rot} \vec{E} = -\mu_o \mu_r \frac{\partial \text{rot} \vec{H}}{\partial t} \quad (18)$$

A baloldal számtanórán tanult azonosság alapján átalakítható:

$$\text{rot rot} \vec{E} = \text{grad div} \vec{E} - \Delta \vec{E} \quad \text{melynek } i\text{-edik koordinátája:}$$

$$\text{rot}_i \text{rot} \vec{E} = \text{grad}_i \text{div} \vec{E} - \Delta E_i$$

Itt a jobboldal első tagja nulla (14) egyenlet miatt. (18) jobboldalában található **rot H** a gerjesztési törvény (16) alakjával helyettesíthető. Az eddigieket most egy kupacba hordva (18) most így olvasható:

$$\Delta \vec{E} = \mu \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (19)$$

Elkövettünk egy szorzást (-1) -el, valamint alkalmaztuk $\epsilon - ra$, $\mu - re$ a $\mu = \mu_o \mu_r$ típusú rövidebb írásmódot.

(19) a homogén hullámeqyenlet vezető közegre. Ha (19)-ben a közeg vezetőképessége $\gamma = 0$, akkor kapjuk az alábbi homogén hullámeqyenletet szigetelő közegekre, illetve vákuumra:

$$\Delta \vec{E} = \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (20)$$

Ilyennel már találkoztunk a hidrodinamika egyenleteinek linearizálása nyomán. Megjegyezzük, hogy a mágneses mezőre ugyanezen egyenletek érvényesek. Ha a (16) **rot** képzésével kezdjük az átalakítást akkor jutunk a mágneses térre érvényes hullámeqyenlethez, ezzel azonban nem foglalkozunk.

(20) vektoreqyenlet szétesik az egyes térerő koordinátákra vonatkozó egyenletekre. Itt csak az elektromos mező x koordinátájára írjuk föl de észben tartjuk, hogy hat db ilyen egyenletünk van, három db az elektromos tér koordinátáira, és három a mágneses mezőre.

$$\Delta E_x = \epsilon \mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

Ezek parciális differenciálegyenletek a meghatározandó **$E_x(x, y, z, t)$** függvény és társai számára. A hullámeqyenlet némileg csalóka, ti. nem ad számot az elektromos és mágneses tér csatolásáról. Ha tehát találunk hullámeqyenlet megoldásokat, ezek olyan megoldásfüggvényeket is tartalmazhatnak, amelyek ugyan megoldásai a hullámeqyenletnek, de nem írhatnak le elektromágneses hullámokat. A hullámeqyenlet megoldásaival tehát vissza kell zárándokolnunk az eredeti Maxwell egyenletekhez, hogy megállapíthassuk, a megoldások közül melyek lehetnek **EM** hullámok.

A legegyszerűbb megoldástípust monokromatikus síkhullám formájában tudjuk megadni. A síkhullám megoldás alakja a következő

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_o e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r} + \varphi)} \quad (21)$$

A monokromatikus síkhullámok tulajdonságaival, jellemzésükhöz szükséges fogalmak definícióival a hanghullámok kapcsán már foglalkoztunk. Itt, túlzott részletezés nélkül futjuk át az alapismereteket.

\vec{E}_o jelenti az **EM** hullám elektromos részének amplitudó vektorát.

A $\Phi(\vec{r}, t) = \omega t - \vec{k} \vec{r} + \varphi$ mennyiség a hullám **fázisa**.

ω a hullám körfrekvenciája, φ pedig a kezdőfázisa.

ω kapcsolata más, időbeli periodicitást jellemző mennyiségekkel a következő:

$\omega = 2\pi/T = 2\pi f$. Itt **T** a periódusidőt -ennyi idő alatt változik a fázis értéke 2π -vel-, **f** a frekvenciát, vagyis a másodpercenként lejátszódó periódusok számát jelöli. A fény színét frekvenciája határozza meg, s itt (21)-ban mivel egyetlen frekvencia szerepel,

őt **monokromatikus** (egyszínű) hullámnak nevezzük. Könnyen ellenőrizhető, hogy ha \vec{E}_1, \vec{E}_2 (21) alakú megoldások ω_1, ω_2 körfrekvenciákkal, akkor az $\vec{E} = C_1 \vec{E}_1 + C_2 \vec{E}_2$ alakú lineáris kombináció is megoldása (20)-nek. Ez (20) egyenlet linearitásának következménye. Így változatos függvényalakok rakhatók össze monokromatikus hullámok szuperpozíciójával, s a monokromatikusokra kifacsart ismereteink nagy része ezekre is ráhúzható. Még tovább mehetnénk a szuperpozíció útján, ugyanis a szuperpozíció nem csak diszkrét, jól körülhatárolt ω_1, ω_2 körfrekvenciájú hullámokra követhető el, hanem folytonos frekvenciatarományra is.

A \vec{k} mennyiséget felírjuk a saját irányába mutató \vec{n} egységvektor, és a vektor k hosszúságának szorzataként $\vec{k} = k \vec{n}$. Rögzített t^o időpontban az azonos Φ_0 fázisú pontok az

$$\vec{n} \vec{r} = (\omega t^o + \varphi - \Phi_0)/k = konst$$

sík mentén helyezkednek el. Ez az $\vec{n} \vec{r} = konst$ formula, a sík Hesse-féle normálalakja, vagyis az állandó fázisú pontok síkot alkotnak, ezért nevezik az (21) alakú hullámot síkhullámnak. Az összefüggésben \vec{n} a konstans fázisú (sík) felület normál-egység-vektora.

A térbeli periódicitást jellemző periódushossz -a \mathbf{T} periódusidő térbeli megfelelője fázisfelületi merőleges irányában mért azon távolság, amelyhez a fázis 2π növekménye tartozik, ezt **hullámhossz**nak nevezzük, szokásos jelölése λ . A definíciót átültethetjük a következő kifejezésekbe:

$$\omega t^o - k \vec{n} \vec{r} + \varphi = \Phi_0 \qquad \omega t^o - k \vec{n} (\vec{r} + \lambda \vec{n}) + \varphi = \Phi_0 + 2\pi$$

Kivonással jutunk a $k * \lambda = 2\pi$, összefüggéshez, amelyből kapjuk $\lambda = 2\pi/k$. Az $1/\lambda$ mennyiség az $\mathbf{1 m}$ hosszra jutó hullámok számát jelenti. Ez pontos térbeli megfelelője az időbeli periódicitás kapcsán bevezetett frekvenciának. Ennek 2π -szerese a körhullám-szám, $k = 2\pi/\lambda$ amelyet alkalmanként a fázisfelület normálisa irányába mutató vektorként kezelünk $\vec{k} = k * \vec{n}$.

A konstans fázisú felület mozgását követjük. Valamely időponthoz $\omega t^o - k \vec{n} \vec{r} + \varphi = \Phi_0$ fázisérték tartozik. Ha az idő t^o -ról $t^o + \Delta t$ -re növekszik, a fázisfelület normálisa irányába Δs -el mozdulunk el, hogy a Φ_0 fázis értéke ne változzon: $\omega (t^o + \Delta t) - k \vec{n} (\vec{r} + \Delta s \vec{n}) + \varphi = \Phi_0$. Azaz a fázisfelület Δt időtartam alatt Δs -el mozdult el a normális irányába. Kivonással kapjuk $\omega \Delta t - k \Delta s = 0$. A fázis felület $\vec{E} = grad \div \vec{E} - \Delta \vec{E}$ fázisfelület c_f sebessége tehát:

$$c_f = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\omega}{k} \tag{22}$$

Figyelembe véve, hogy $\omega = 2\pi f$ valamint azt, hogy $k = 2\pi/\lambda$ kapjuk a $c_f = \lambda * f$ közismertebb változatot.

Az (21) alakú síkhullámok egy igazán előnyös sajátosságát említettük a mechanikai hullámok kapcsán, aktualitása okán most szószerint idézzük:

A monokromatikus síkhullám komplex írásmódja varázslatos egyszerűsítéseket tesz lehetővé matematikai műveleteinkben, némely differenciálási műveletek algebrai műveletekkel helyettesíthetők. Könnyen ellenőrizhető, hogy a síkhullám komplex formájára $\partial \vec{E} / \partial t =$

$i\omega \vec{E}$ vagyis $\partial/\partial t \Rightarrow i\omega$, amely azt jelenti, hogy az idő szerinti deriválás művelete egyszerű algebrai szorzássá egyszerűsödik.

A helykoordináták szerinti deriválások még több lehetőséget kínálnak. Figyelembe véve az exponensben szereplő skaláris szorzás kifejtését $\vec{k} \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$ az x koordináta szerint parci. deriválás hatása a monokromatikus síkhullám komplex alakjára így írható:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = -ik_x \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r} + \varphi)} = -ik_x \vec{E} \quad (23)$$

Tehát $\partial/\partial x \Rightarrow -ik_x$. A többi, y és z koordinátákra hasonló eredményeket kapunk. Ezek összefoglalásával a **Nabla** operátor a következőképpen helyettesíthető:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_3 = -ik_x \vec{e}_1 - ik_y \vec{e}_2 - ik_z \vec{e}_3 = -i \vec{k}$$

Vagyis röviden $\nabla = -i \vec{k}$. (esetleg $= -i k \vec{n}$). A jelölések egyértelműsége céljából itt az $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots$ egységvektor jelöléseket alkalmaztuk a közismertebb \vec{i}, \vec{j}, \dots jelölések helyett. A deriválási műveletek átírás a következő szabályokhoz vezet. Ha $\vec{a}(\vec{r}, t)$ egy síkhullámot leíró függvény, akkor a következők alkalmazhatók: $div \vec{a} = (\nabla \vec{a}) = -i(\vec{k} \vec{a}) = -i k (\vec{n} \vec{a})$, valamint $rot \vec{a} = [\nabla \times \vec{a}] = -i[\vec{k} \times \vec{a}] = -i k [\vec{n} \times \vec{a}]$. Tudván a Laplace operátor Nabla operátorral felírt alakját, ennek is megadható a hullámszám vektoros átírása, amely a következő: $\Delta = \nabla^2 = (-i \vec{k})^2 = -k^2$

A fentiek alapján a Maxwell egyenletek átírása síkhullám alakra a következő:

Differenciális

Síkhullám

$$rot \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad -i k [\vec{n} \times \vec{H}] = \gamma \vec{E} + i \omega \epsilon \vec{E}$$

$$rot \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad -i k [\vec{n} \times \vec{E}] = -i \omega \mu \vec{H}$$

$$div \vec{D} = \rho \quad -i k (\vec{n} \vec{D}) = 0$$

$$div \vec{B} = 0 \quad -i k (\vec{n} \vec{B}) = 0$$

A hullámgörbe átírása:

$$\Delta \vec{E} = \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad -k^2 \vec{E} = -\epsilon \mu \omega^2 \vec{E}$$

A fenti változat szigetelőkre vonatkozik, a vezetőkben (csillapodva) terjedő hullámokra az alábbi vonatkozik:

$$\Delta \vec{E} = \mu \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad -k^2 \vec{E} = (i \mu \gamma \omega - \epsilon \mu \omega^2) \vec{E}$$

Ennyi előkészület után, gyorsan kiolvashatjuk e formulák fizikai tartalmát. Elsőként a mezők forrásaival foglalkozó egyenletek következményeit értelmezzük.

Töltésmentes térben $\text{div } \vec{D} = 0$ amelyből eljutottunk az $(\vec{n} \cdot \vec{E}) = 0$ következményhez. Figyelembe vettük a $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ anyagi egyenletet is, valamint azt, hogy a $-i k \epsilon (\vec{n} \cdot \vec{E}) = 0$ csak akkor lehet nulla, ha a skaláris szorzat nulla. A skaláris szorzat nulla értéke a két vektor merőlegességét jelzi, vagyis az **EM** hullám elektromos része un. transzverzális hullám mert a hullám terjedési irányára (\vec{n}) merőleges a síkhullám által leírt fizikai mennyiség vektora (\vec{E}). Hasonlóan jutunk ugyanehhez a következményhez a mágneses mező kapcsán is. $\text{div } \vec{B} = 0 \Rightarrow (\vec{n} \cdot \vec{H}) = 0$, azaz az **EM** hullám mágneses része is transzverzális hullám. Itt is alkalmaztuk a mágneses mezőkre vonatkozó anyagi egyenletet.

A szigetelőkre érvényes hullámegyenletből azt olvashatjuk ki, hogy $-k^2 = -\epsilon \mu \omega^2$, vagyis $\omega/k = 1/\sqrt{\epsilon \mu}$ erről a kifejezésről megmutattuk, hogy a hullám fázissebességét adja -lásd az 22-es képlet környékét. Vákuumban $\epsilon_r = 1$ valamint $\mu_r = 1$ azaz a vákuumbeli fénysebességet következő kifejezés adja meg:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

Ennek egy alapvető jelentése az, hogy vákuumban minden **EM** hullám ugyanazzal a sebességgel terjed, legyen az látható fény, vagy röntgen-sugárzás, vagy éppen rádiófrekvenciás jel. A vákuumbeli fénysebesség nem egyszerűen az **EM** hullámok sebessége, attól sokkal több, nevezetesen a nem nulla nyugalmi tömegű részecskék - úgymond anyagi részecskék, testek - számára egy el nem érhető **határsebesség** szerepét játssza.

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{c}{n} \quad (24)$$

Anyagi közegben a fény fázissebessége lecsökken mivel $\epsilon_r > 1$ és $\mu_r \approx 1$ átlátszó közegre, így semmi akadálya annak, hogy részecskék e közegben a helyi anyagbeli fénysebességtől gyorsabban haladjanak. Ha töltött részecskék haladnak gyorsabban, mint a helyi fénysebesség, akkor lép fel az un. Cserenkov sugárzás. (Ez egy **EM** sugárzás, a sugárzás mechanizmusa némi analógiát mutat a szuperszónikus repülőgépek okozta hangrobbanással).

Az elektromos és mágneses mezők kapcsolatát fejezhetjük ki a gerjesztési törvényből, vagy a nyugalmi indukció egyenletéből:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \vec{H} = k/(\omega \mu) [\vec{n} \times \vec{E}]$$

Annyit azonnal látunk, hogy túl azon, hogy mind az elektromos, mind pedig a mágneses mező merőleges a hullám terjedés irányára, ezek egymásra is merőlegesek, hiszen e vektorszorzat eredményvektora merőleges mindkét tényezővektorra.

A jobboldal együtthatója átalakítható $k/\omega = 1/c = \sqrt{\epsilon\mu}$. Ennek visszahelyettesítésével kapjuk :

$$\vec{H} = \sqrt{\epsilon/\mu} [\vec{n} \times \vec{E}] \quad (25)$$

A fenti összefüggést az amplitudókra is átírhatjuk, csupán piciny o indexeket kell a \mathbf{H} és az \mathbf{E} mennyiségek bokájára kötnünk.

A \mathbf{EM} mező energiájának mérlegegyenlete kapcsán bevezettük az elektromos, illetve a mágneses mezők energiasűrűségét. Most arra vagyunk kíváncsiak, hogy szigetelőkben terjedő monokromatikus síkhullámban a teljes \mathbf{EM} energián milyen arányban osztoznak az elektromos és a mágneses terek.

Az elektromos mező energiasűrűsége így néz ki: $\rho_e = 1/2 \vec{D} \cdot \vec{E} = 1/2 \epsilon E^2$. A mágneses mezőé pedig így: $\rho_m = 1/2 \vec{H} \cdot \vec{B} = 1/2 \mu H^2 = 1/2 \mu (\sqrt{\epsilon/\mu} [\vec{n} \times \vec{E}])^2 = 1/2 \epsilon E^2$. Látjuk tehát, hogy az elektromos és a mágneses energia sűrűsége megegyezik. Itt fölhasználtuk amit számtanórán tanultunk a vektorszorzat kifejtéséről $[\vec{n} \times \vec{E}] \rightarrow |\vec{n}| |\vec{E}| \sin\alpha = E$. Ez utóbbi attól van, hogy az \mathbf{n} egységvektor, valamint az \mathbf{E} és az \mathbf{n} szöge nagyon derék, így a sinusza 1.

Az energián való osztozkodás szempontjából teljesen más a helyzet vezető közegekben, ionizált gázokban terjedő hullámok esetében, itt a hullám mágneses összetevője aránytalanul több energiát birtokol, mint az elektromos párocskája.

Tartozunk még az \mathbf{EM} hullámok terjedése kapcsán annak tisztázásával, hogy az energiaszállítás miként alakul monokromatikus síkhullámok terében. Az energiátranzportot mint tudjuk, az $\vec{S}(\vec{r}, t) = \vec{E} \times \vec{H}$ un. Poynting vektor írja le. Felidézzük a jelentését -megadja az áramlás irányára (S irányára) merőleges egységnyi felületen, időegység alatt átáramló energiát, egysége W/m^2 . Láttuk korábban azt, hogy az extenzív mennyiségeknek kétféle árama van, a konduktív, vagy más néven vezetési áram, amely a megfelelő vezető közegben alakul ki, ha az extenzív mennyiséghez tartozó intenzív mennyiség inhomogén -pl. elektromos vezető közegben elektromos erőteret tartunk föl-. Konvektív áram akkor jön létre, ha az áramló, mozgó közeg magával cipeli az összes extenzív mennyiségét. Tisztázandó tehát az EM hullámokban fellépő energiátranzport jellege is.

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \sqrt{\epsilon/\mu} [\vec{E} \times [\vec{n} \times \vec{E}]]$$

Talán volt szó számtanórán ilyen beágyazott vektorszorzat kifejtéséről: $[\vec{a} \times [\vec{b} \times \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$. Figyelembe véve a hullám transzverzálitását az $(\vec{n} \cdot \vec{E})$ skaláris szorzat nulla. Ami nekünk marad az a következő:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \sqrt{\epsilon/\mu} E^2 \vec{n}$$

A gyökös együtthatót szorozzuk is, osztjuk is ϵ -al a gyökjelen belül.

$$\sqrt{\epsilon/\mu} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu} \frac{\epsilon}{\epsilon}} = \frac{\epsilon}{\sqrt{\epsilon\mu}} = c\epsilon$$

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \epsilon E^2 c \vec{n} = \rho_{wem} \vec{v} \quad (26)$$

Itt fölhasználtuk azt a tényt, hogy a mágneses és az elektromos mezők energiasűrűsége egyenlő.

Az utolsó kifejezés pontos megfelelője pl. a $\rho\vec{v}$ konvektív tömegáramnak, vagyis a Poynting vektor konvektív áram formájában czipeli a **EM** mezők energiáját. E mechanikai tömegáram analógiát ne vegyük nagyon komolyan. Amíg a rendelkezésre álló teret csak egy folyadék töltheti ki, egyetlen sebességtérrel, és egyetlen tömegsűrűséggel pontonként, addig vákuumban akárhány **EM** hullám haladhat kölcsönhatás nélkül.

Gyorsan változó **EM** sugárzás esetén - ilyen például a fény is - a sugárzás fizikai intenzitása alatt a Poynting vektor időátlagát értjük.

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T |\vec{S}(\vec{r}, dt)| dt = \frac{1}{T} \epsilon c \int_0^T E^2(t) dt$$

Az utóbbit (26) alapján kaptuk.

Két hullám ha találkozik, s ...

A szuperpozíció az elektromos térerősségekre működik, és nem az intenzitásra így tehát az eredő térerősség $\vec{E}_e = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ Az intenzitás viszont általában nem adódik össze: $I_e \neq I_1 + I_2$

Az intenzitás az elektromos térerő négyzetének időintegráljával arányos:

$$|\vec{E}_e(t)|^2 = |\vec{E}_1|^2 + |\vec{E}_2|^2 + 2\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2$$

A fény, illetve az eredő **EM** sugárzás intenzitása ennek időátlagával arányos. Eredményül ezt kapjuk: $I_e = I_1 + I_2 + I_{12}$, ahol az I_{12} tagot interferenciának nevezzük. Ha ez nulla, akkor nincs interferencia, s ekkor valóban az intenzitások egyszerűen összeadódnak. Közönséges fényforrások esetében szinte mindig ez a helyzet. Ha két villanykörtét külön, külön, illetve együtt felgyújtunk, akkor együttes működésük esetén az egyedi intenzitásaik összegét kapjuk. Megvizsgáljuk tehát, milyen feltételek fennállása esetén kapunk interferenciajelenséget.

—folyt. köv—

Habár (szigetelő közegekben) az **EM** mezők összenergiájából az elektromos és mágneses összetevők egyenrangúan részesednek, az anyagi közegekkel való kölcsönhatás szempontjából mi kitüntetettként kezeljük a hullám elektromos részét. Ez megnyilvánul abban, hogy a polarizációs síkot az elektromos vektorra adjuk meg, fény esetében a fényvektor alatt a hullám elektromos részét értjük. Az elektromos mező ilyen előtérbe helyezése a következőkön alapul:

Az elektromágneses sugárzás a közeg elektromosan töltött összetevőivel lép kölcsönhatásba. Tudjuk, hogy a mágneses mező által kifejtett erőt az un. Lorentz erő írja le, így az elektromos illetve a mágneses összetevők erőhatásai a következőképpen adhatók meg:

$$\vec{F}_e = q\vec{E} \quad \vec{F}_m = q[\vec{v} \times \vec{B}]$$

Alkalmazva a síkhullámban az elektromos és a mágneses mezők között fönálló (25) $\vec{H} = \sqrt{\epsilon/\mu} [\vec{n} \times \vec{E}]$ kapcsolatot (ez itt a nyugalmi indukció egyenletéből származik)

$$\vec{F}_m = q[\vec{v} \times \vec{B}] = q\mu\sqrt{\epsilon/\mu} [\vec{v} \times [\vec{n} \times \vec{E}]]$$

Figyelembe vesszük a fénysebességre kapott összefüggést: $C = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$, valamint egy becslést teszünk a következő kifejezés maximumára $|\vec{v} \times [\vec{n} \times \vec{E}]| \leq vE$. Itt a vektorszorzat kifejtésében mindenféle sinus kifejezések jelennének meg, ezekre azonban mindenütt ráigértünk 1-et, így kaptuk a jobboldalt.

$$F_m \leq \frac{v}{C} qE = \frac{v}{C} F_e$$

A hullám mágneses része által kifejtett erő csak fénysebesség közeli elektron- (vagy más töltött részecske-) sebesség esetén lesz összemérhető a hullám elektromos része által kifejtett erővel. Ez az ami miatt jobbára csak az elektromos mező hatásával számolunk, s legtöbb esetben a mágneses mező hatását joggal elhagyhatjuk.

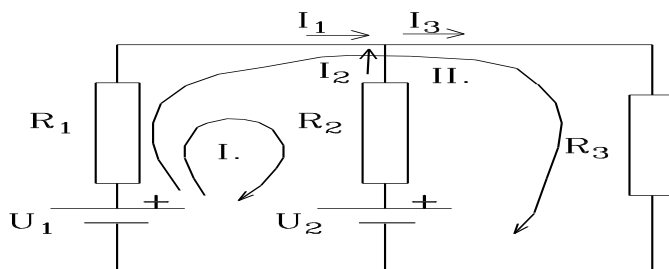
4. Alkalmazásokhoz kapcsolódó részek.

-Na még ez is folyt. köv-

Lineáris (azaz az $I=U/R$ Ohm törvény követőiből összeállított) hálózatokra a Kirchoff csomóponti és hurok törvények alkalmazásával összetett áramkörök ismeretlen adatait (pl áramokat) határozhatjuk meg.

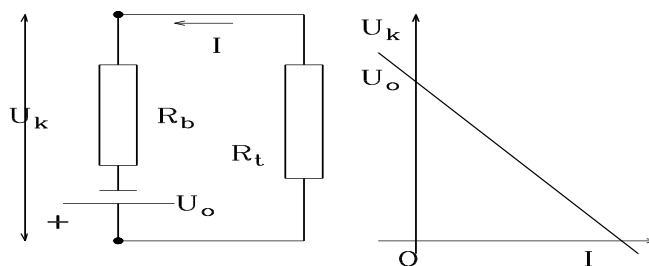
$$\begin{aligned} I_1 + I_2 - I_3 &= 0 \\ I_1 R_1 - I_2 R_2 &= U_1 - U_2 \\ I_1 R_1 + I_3 R_3 &= U_1 \end{aligned}$$

Olyan 'új' hurokra, amely olyan hurok részeiből áll, melyekre már felírtuk a huroktörvényt, már ne lőjünk. Ennek eredménye hosszas küzdelem után az lehet, hogy $0 = 0$, ami ugyan igaz, de ezért nem érdemes ennyit dolgozni. Ugyanazt az egyenletet kapjuk a fenti kis mintapéldánkban, ha az utolsó két egyenletet kivonjuk egymásból és ha az R_2 , R_3 , U_2 elemek alkotta körre felírjuk a huroktörvényt.



Feszültségforrás adatai

Kapocsfeszültség függése a terhelőáramtól:



Feszültségforrásokat üresjárású kapcsolási rajzunkkal és belső ellenállásukkal jellemezzük. A feszültségforrás kapcsain megjelenő ún. kapcsolási feszültség a feszültségforrás terhelésétől (azaz az alkalmazott külső R_t ellenállástól), pontosabban a feszültségforráson átfolyó áramtól is függ. Az (??) ábra kapcsolási rajza alapján Ohm törvénye a teljes áramkörre ide vezet: $U_o = I R_t + I R_b$ amiből a feszültségforrás kapcsain megjelenő $U_k = I R_t$ feszültség kifejezhető: $U_k = U_o - I R_b$. Nevezetes adatok: a rövidzárási áram $I_r = U_o / R_b$. Ezt akkor kapjuk, ha $U_k = 0$ vagyis, ha rövidre zárjuk a kimenetet (ilyet azért ne tegyünk). Egy másik nevezetes adat az üresjárású kapcsolási feszültség, vagyis a terheletlen feszültségforrás kapcsai között mérhető U_o feszültség. Ezt valamilyen nagyon hagyományos és nagyon homályos ok miatt *elektromotoros erőnek* is nevezik, amelyről legalább azt illik tudnunk, hogy sem nem elektromotoros és sem nem erő. Azt látjuk, hogy a belső ellenálláson eső $I R_b$ feszültséggel csökkentett feszültséget kapunk a kapcsolásokon. Az üresjárású kapcsolási feszültségnél nagyobb kapcsolási feszültséget akkor mérhetünk, ha ellentétes irányú áramot hajtunk át a szerszámon, vagyis 'töltjük' őt.

Azt látjuk, hogy a terhelte feszültségforrás árama a telep (azaz a feszültségforrás) belső ellenállásán is átfolyik, így a telep által leadott teljesítmény egy része magában a telepben jelenik meg. Ha adott feszültségforrás esetén különböző terhelő ellenállásokat (más néven fogyasztót, vagy külső ellenállást) alkalmazunk, akkor különböző hasznos -azaz a fogyasztón megjelenő - teljesítményeket kapunk, de a teljes leadott teljesítmény fogyasztóra jutó aránya is függ az alkalmazott fogyasztó ellenállása és a telep belső ellenállásának arányától. Most azt nézzük meg, hogy adott R_b belső ellenállással és U_o üresjárású kapcsolási feszültséggel specifikált telep esetén milyen terhelő ellenálláson kapjuk az adott telep esetén elérhető legnagyobb hasznos teljesítményt. Ezt az esetet *illesztés teljesítményre* kifejezéssel illetjük.

$$I = \frac{U_o}{(R_b + R_t)} \quad P_t = I^2 R_t = U_o^2 \frac{R_t}{(R_b + R_t)^2}$$

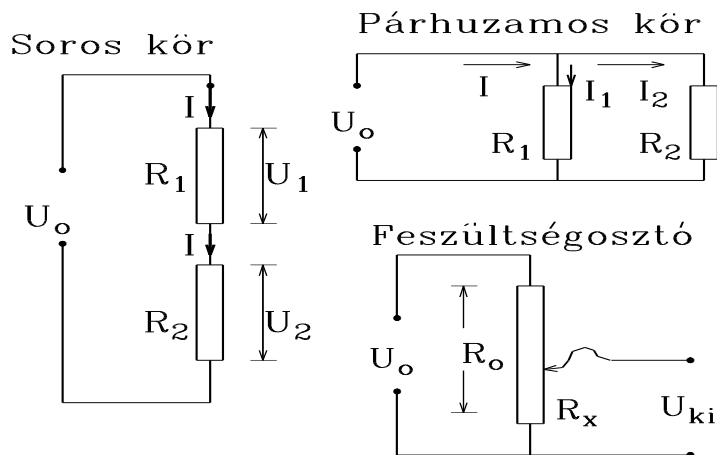
A P_t teljesítmény az R_t terhelő ellenállás függvénye adott telep esetén. Szélső értéke azon terhelő ellenállás mellett lehet, amelynél a P_t R_t szerinti deriválva eltűnik, vagyis:

$$U_o^2 \frac{(R_b + R_t)^2 - 2 * R_t * (R_b + R_t)}{(R_b + R_t)^4} = 0$$

A számláló nulla értéke biztosítja ezt, amely az $R_t = R_b$ feltételhez vezet. Legnagyobb teljesítményt tehát akkor kapjuk, ha a telep belső ellenállásával azonos értékűre választjuk a terhelő ellenállás értékét. Megjegyezzük, hogy ebből az is következik, hogy ebben az esetben a belső ellenálláson és a külső terhelésen azonos teljesítmény jelenik meg, azaz a leadott teljesítmény csupán 50 %-a jelenik meg hasznos terhelésként.

Ellenállások kapcsolása, az eredő számítása.

A kapcsolási rajzokon a vonalakkal jelölt drótokat ellenállás nélkülinek tekintjük. Potenciális, vagyis feszültséget csak a téglalappal jelölt ellenállások végpontjai között mérhetünk.



5. ábra. Soros, párhuzamos kapcsolás

Több ellenállásból álló kapcsolás **eredő ellenállása** alatt annak az egyetlen ellenállásnak az értékét értjük, amely hatásában képes helyettesíteni a több ellenállásból összetett ellenállás rendszert. Itt most ez azt jelenti, hogy ugyanazon feszültség hatására ugyanazon áram folyik mindkettőn, vagyis az eredeti ellenállásrendszeren (amelyből két drót lóg ki, és ezzel kapcsolódik valamilyen elektromos körhöz), illetve ezt eltávolítva a rendszert helyettesítő eredő ellenálláson.

Soros kör minden elemén -ugyanis nincs közben elágazás - ugyanazon áram folyik át. Mivel emlékezünk a potenciál és az egységnyi töltésen végzett munka kapcsolatára, a töltésegység körbevitelekor végzett munka az egyes 'részmunkák' összege, vagyis $U_o = U_1 + U_2$. Ohm törvénye, alapján írhatjuk: $R_e I = R_1 I + R_2 I$. Némi együgyűsítést követően kapjuk a soros ellenállások eredőjének meghatározására szolgáló összefüggést $R_e = R_1 + R_2$. Ez az összegzési szabály nem csak kettő, de akárhány sorosan kapcsolt ellenállás esetén is hasonlóan alkalmazható. Tisztáznunk kell még azt is, hogy soros körben milyen elvek alapján osztoznak az ellenállások a teljes feszültségen. Az $U_1/R_1 = U_2/R_2$ újfent csak azt fejezi ki, hogy ugyanazon áram folyik át mindkét ellenálláson. Ebből következik, hogy $U_1 = (R_1/R_2) U_2$. Ha tehát **R1** kétszer akkora, mint **R2**, akkor a rajta 'eső feszültség' is kétszer akkora lesz.

Párhuzamosan kapcsolt ellenállások mindegyikén ugyanaz a feszültség jelenik meg, s a főágban folyó I áram a két ellenálláson folyó I_1 és I_2 áramokra bomlik szét. Kirchhoff törvénye szerint $I = I_1 + I_2$. Ha most az áramokat az ellenállásokon megjelenő feszültség alapján Ohm törvényből számítjuk, akkor az új változat $I/R_e = I/R_1 + I/R_2$. Ebből aztán a párhuzamosan kapcsolt ellenállások eredőjére a jól ismert reciprokok összegzési szabály következik:

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Habár jelen formulánkat csupán két ellenállásra vezetjük le, akárhány párhuzamosan kapcsolt ellenállásra is hasonló formában működik. Ha azonban csupán két ellenállásunk van, akkor -közös nevezőre hozás és recziprok képzés után az eredőre egy 'számolásképesebb' formát kapunk:

$$R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

A két ellenálláson megegyezik a feszültség, ezt Ohm törvényével így fejezhetjük ki: $I_1 R_1 = I_2 R_2$. Ez, a párhuzamosan kapcsolt ellenállásokon átfolyó áramok arányára azt mondja ki, hogy: $I_1 = (R_2/R_1) I_2$. Vagyis, ha **R1** kisebb mint **R2**, akkor **I1** nagyobb mint **I2**, azaz a kisebb ellenálláson folyik a nagyobb áram.

Ugyanazon értékű ellenállás -mondjuk 1 kΩ - lehet mikroszkópikus méretű, de több kilogramos is. Az egyik akár 0.1 W teljesítmény hatására is elfüstöl, a másik pedig több kilowatt teljesítményt is képes környezetének leadni, megtartván eredeti paramétereit. Az ellenállások egyik fontos jellemzője tehát az a teljesítmény, amelyet tartósan képesek elviselni paramétereik megváltoztatása nélkül. Ez a P_{mx} maximális teljesítmény behatárolja az adott ellenállásra kapcsolható feszültség nagyságát, illetve az ellenálláson áthajtható áram maximumát is. A megadott maximális teljesítmény, és az ellenállás értékeiből ezek a megengedett maximális értékek számíthatók:

$$U = I R \quad P = U I \quad P = I^2 R \quad P = U^2 / R \\ U_{mx} = \sqrt{R P_{mx}} \quad I_{mx} = \sqrt{P_{mx} / R}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy pl. egy R=100 ohm ellenállású, 1 W-os ellenállásra maximum 10 V kapcsolható, illetve max 0.1 A áram hajtható át rajta.

Széles körben alkalmazott, -a hallgatói laborban is használjuk- az ábrán látható feszültségosztó, vagy más néven potenciométer. Ilyennel állítjuk be pl. rádiókon a hangerőt. A potenciométernek három kivezetése van. A két szélső kivezetés közötti ellenállás **Ro**, így ha **Uo** feszültséget kapcsolunk rá, akkor $I=Uo/Ro$ áram folyik az ellenálláson keresztül. A harmadik kivezetés egy csúszóérintkező -ezt az ábrán nyilacska jelzi-, amellyel a feszültségosztó egyik vége, és e csúszóérintkező közötti **Rx** ellenállás fokozatmentesen (folytonosan) 0 és **Ro** között szabályozható. Mivel ezen az **Rx** ellenálláson is az **I** áram folyik át, Ohm törvénye alapján számítható a kimeneten megjelenő feszültség $U_{ki}=I R_x = (R_x/R_o) U_o$ vagyis a kimeneten megjelenő feszültség 0 és **Uo** között fokozatmentesen szabályozható. Ez a terheletlen feszültségosztó esete, ugyanis feltettük, hogy a kimenet terheletlen -nem folyik áram a csúszóérintkező irányába, így a teljes **I** áram folyik át az **Rx** ellenállásrészen is.

4.1. Áram és feszültségmérés

Bármely mérési eljárásnál alapvető követelmény, hogy a mérőműszer rákapcsolása ne -vagy legalább a lehető legkisebb mértékben - befolyásolja a mérendő mennyiség eredeti értékét.

Feszültségmérő kapcsolása és méréshatárának kiterjesztése

Valamely áramköri elem -pl. ellenállás- két kivezetése közötti potenciálkülönbséget (feszültséget) az áramköri elemmel párhuzamosan kapcsolt eszközzel tudjuk mérni. Az áramköri elem átfolyó áram akkor nem változik (így a rajta mérhető IR feszültség sem) a műszer párhuzamos kapcsolása során, ha a bekapcsolt műszer ellenállása végtelen nagy -úgymond szakadásként viselkedik-, vagy legalábbis a műszer ellenállása nagyságrendekkel nagyobb annak az áramköri elemnek az ellenállásánál, amelyen a feszültséget mérjük. A valódi feszültségmérőt véges R_b belső ellenállása, és egy U_m méréshatár jellemzi. Egy ideális voltmérő, és egy R_b ellenállás párhuzamos kapcsolásával modellezhetünk egy valódi (-hoz közelálló) voltmérőt.

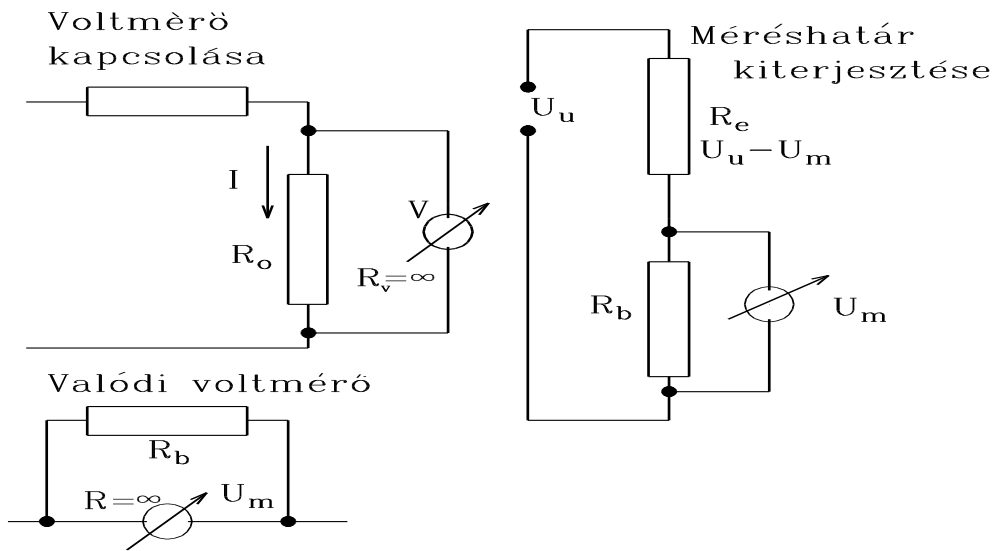
Amikor a feszültségmérő sarkai között a méréshatárnak megfelelő U_m feszültséget alkalmazzuk, akkor a műszer mutatója végkitérésben van, vagy a végkitéréshez közeli valamilyen kerek skálarészen áll. Kérdés az, hogyan, milyen kapcsolásban lehet ezt a méréshatárt kiterjeszteni ha pl. 1 V méréshatárú műszerrel mondjuk $U_u = 100\text{ V}$ -t szeretnénk mérni. Ahogy azt az (6) ábra kapcsolási rajza mutatja, ilyen esetekben sorba kapcsolt ún. előtétellenállást alkalmazunk. Ennek értékét úgy választjuk meg, hogy miközben a soros ellenállással kiegészített feszültségmérő sarkai közé az új méréshatárnak megfelelő feszültséget kapcsoljuk, az eredeti feszültségmérőre az eredeti méréshatárnak megfelelő feszültség jusson. Ekkor a feszültségmérő által mutatott U_m feszültség a kiegészített feszültségmérőre kapcsolt U_u feszültséget jelzi. Az említett számértékekkel ez azt jelenti, hogy az előtétellenálláson 99 V , az eredeti feszültségmérőn 1 V jelenik meg, s ez a mutatott érték az előtétellenállással kiegészített voltmérőre kapcsolt 100 V -t jelenti.

Az előtétellenálláson, és a sorbakapcsolt feszültségmérőn ugyanazon áram folyik át. Ohm törvénye alapján ez azt jelenti, hogy:

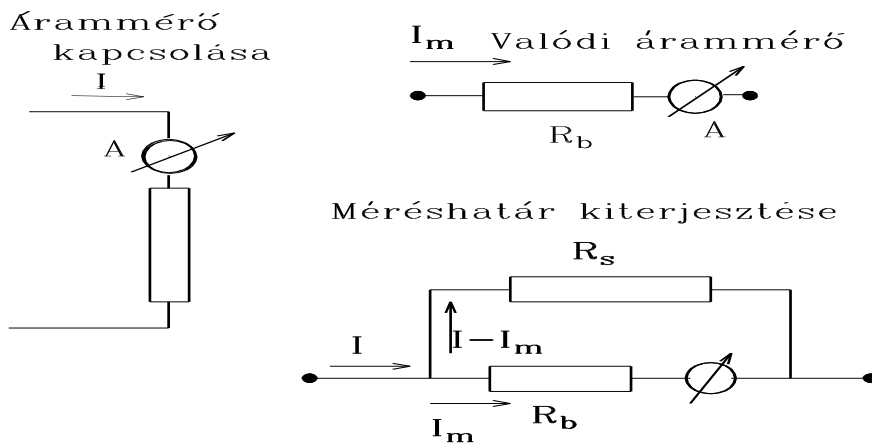
$$(U_u - U_m)/R_e = U_m/R_b$$

$$R_e = R_b (U_u - U_m)/U_m$$

Árammérő és kapcsolása, méréshatár kiterjesztése.



6. ábra. Feszültségmérő kapcsolása, mérés határ kiterjesztése.

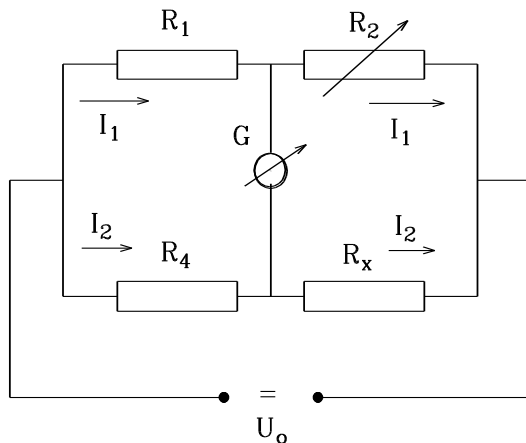


Az áramló, átfolyó mennyiség méréséhez megbontjuk az eredeti vezetékét, az árammérőt sorba iktatjuk azzal az eszközzel, amelyen az (átfolyó) áramot kívánjuk meghatározni. Ezen mérőeszköz bekötése akkor nem módosítja az áram eredeti értékét, ha az ellenállása nulla, vagy legalábbis a véges ellenállása elhanyagolhatóan kicsiny a soros kör ellenállásához képest. A valódi árammérőt véges R_b belső ellenállás, és egy I_m mérés határ jellemzi. Az ilyen árammérőt úgy modellezzük, hogy az R_b belső ellenállással sorba kapcsoljuk az ideálisnak tekintett (nulla belső ellenállású) árammérőt. Amikor az árammérőn a mérés határnak megfelelő I_m áram folyik, akkor a műszer mutatója végkitérésben van, vagy

a végkitéréshez közeli valamilyen kerek skálarészen áll. Kérdés az, hogy hogyan, milyen kapcsolásban lehet ezt a mérés határt kiterjeszteni, ha például $I_m = 0.1 \text{ A}$ mérés határú műszerrel $I_u = 1 \text{ A}$ -t kívánunk mérni. Ilyenkor az eredeti műszerrel párhuzamosan kapcsolt ún. sönt ellenállást alkalmazunk, erre terelgetvén az új mérés határnak megfelelő áram, eredeti mérés határ fölötti részét. Miközben a főágban I_u áram csorog, e söntre tereljük a többlet $I_u - I_m$ áramot, ám az eredeti műszeren továbbra is csak az I_m mérés határnak megfelelő érték folyik. Csakhogy az ennek megfelelő mutatott érték már a főág I_u áramát jelzi.

A kereskedelemben kapható műszerekbe ezeket az előtét és sönt ellenállásokat eleve beleépítik, így a mérés határkapcsoló beállítása, a megfelelő ellenállás bekapcsolását jelenti.

4.2. Mérés Wheatstone hídban



Az egyenáramú Wheatstone hidat ellenállás értékek viszonylag pontos meghatározására használjuk. Elvi kapcsolási rajzán négy ellenállást, és egy galvanométert találunk. A galvanométer igen kis áramerősségek mérésére szolgáló műszer (pl. 10^{-8} A). E kapcsolatban azonban csupán nullműszerként használjuk, vagyis a galvanométer skáláját, vagyis, hogy pl. egy skálarész pontosan mekkora áramnak felel meg, nem is kell használnunk. A négy ellenállás közül az egyik az ismeretlen, ez az R_x , az R_1 és az R_4 értékei egy adott mérésnél ismert, rögzített értékek. Az R_2 változtatható ellenállás, értékét addig módosítjuk, amíg a G galvanométer nulla áramot nem jelez. Ha a nulla áramot elértük, akkor azt mondjuk, hogy a Wheatstone híd ki van egyenlítve. A továbbiak e kiegyenlített állapotra vonatkoznak. A kiegyenlített állapothoz vezető R_2 értéket kb. 4-5 decimális jegy pontossággal le tudjuk olvasni. A nulla áram azt is jelzi hogy a galvanométer két vége azonos potenciálon van. Ezekből következnek az alábbiak:

$$I_1 R_1 = I_2 R_4 \quad I_1 R_2 = I_2 R_x$$

Osztással, majd átrendezéssel kapjuk:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_x}{R_4} \quad R_x = \left(\frac{R_4}{R_1} \right) R_2$$

Az ismeretlen ellenállás értékét tehát ismert ellenállásértékek segítségével fejezzük ki. Az összefüggésben szereplő (R_4/R_1) arányt rendszerint 10 valamilyen hatványára állíthatjuk be (pl 0.1, 1, 10, ..).

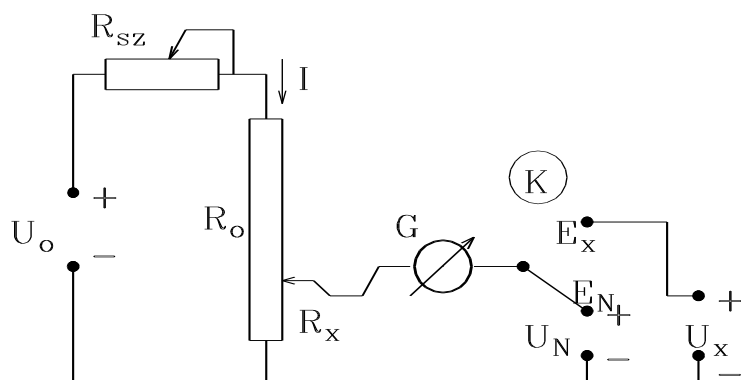
4.3. Mérések kompenzátorral

Kompenzációs módszerrel kicsiny egyenfeszültségeket mérhetünk viszonylag nagy pontossággal. Az ábrán látható elvi kapcsolási rajz szerint, a kompenzációs mérés egy precíz feszültségosztóra (potenciométerre) épül. A galvanométert ennél a mérésnél is, éppúgy mint a Wheatstone hidnál, nullműszerként használjuk. A nyíllal jelölt érintkező helyzetével az R_x értéke 0 és R_0 közötti bármilyen értékre beállítható, így az R_x , G galvanométerhez vezető kivezetésén az Ohm törvénye alapján megjelenő $U_p = I R_x$ feszültség is módosítható.

Mérést a K kapcsoló E_x állásában végzünk, elsőként ezzel az esettel foglalkozunk. A galvanométeren átfolyó áram a kivezetései közötti potenciálkülönbséggel arányos, így a potenciométer R_x értékének változtatásával ez az áram változtatható. A beállított R_x értéke leolvasható a kompenzátor dekadikus karjairól. („dekadikus - tizes beosztás ” itt ez azt jelenti, hogy külön forgatható és leolvasható karok, vagy gombok vannak a 10-Ohmoknak, 100 Ohmoknak, 1000 ... stb). A mérés során arra törekszünk, hogy megtaláljuk azt az R_x értéket, amelynél a galvanométeren 0 áram folyik át. A galvanométer 0 árama azt jelzi, hogy a két kivezetése között nincs potenciálkülönbség, vagyis $U_x = I R_x$. Az ismeretlen feszültség tehát a 4-5 decimális jegyre ismert ellenállás, és a kompenzátor I áramának szorzatával adható meg.

Itt előbukkan a mérési módszer egy másik jellegzetessége, nevezetesen, hogy a mérés időpillanatában a mérendő feszültségforráson át nem folyik áram. Így megvalósul az ideális feszültségmérőkre megkívánt azon követelmény, hogy a mérőeszköz beiktatása ne módosítsa az eredeti mérendő mennyiséget.

Az U_x ismeretlen feszültséget nyilván akkor tudjuk kellő pontossággal megadni, ha az I áram is elegendő pontossággal ismert. Erre szolgál a mérésnek a hitelesítési fázisa, amely nyilván megelőzi a mérési eljárást. Ekkor a K kapcsolót EN állásba kapcsolva U_x helyett egy jól ismert UN feszültségű ún. normálelemet kapcsolunk U_x helyébe. A normálelem feszültsége 3 - 4 decimális jegyre ismert, sőt az elem hőmérsékletének figyelembevételével ez tovább pontosítható. A normálelem e mérésnél, egy 'hitelesített méterrúd' szerepét játssza.



Talán egyszerűbb lesz a hitelesítési eljárás megértése konkrét számértékek használatával.

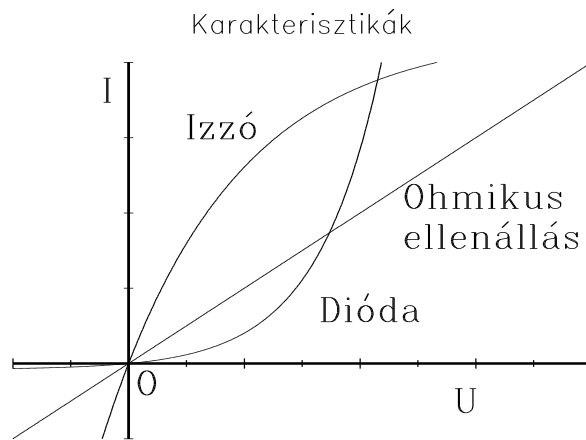
Ha a normálem feszültsége $U_N = 1.0562 \text{ V}$, akkor e feszültségérték számjegyeinek megfelelő ellenállást állítunk be R_x -en, s ezt az R_x értéket R_N -nek fogjuk nevezni. $R_x = R_N = 10562 \text{ Ohm}$.

A potencióméter előtti R_{sz} változtatható ellenállás értéke a potencióméteren átfolyó I áram értékét képes módosítani. R_{sz} értékét addig változtatjuk, amíg a galvanométer nullát nem mutat. A galvanométer nulla árama azt jelzi, hogy a két kivezetése azonos potenciálon van, vagyis $I R_N = U_N$, így $I = U_N / R_N$. Az fenti számértékek alkalmazásával ekkor $I = 10^{-4} \text{ A}$, vagy ha úgy tetszik $I = 0.1 \text{ mA}$. Ezt az un. mérőáramot a továbbiakban nem változtatjuk, sőt a mérés során alkalmanként hitelesítési üzemmódba kapcsolva az esetleg megváltozott mérőáramot újra és újra korrigáljuk. Mivel a beállított mérőáram egy szép kerek szám, a hitelesítést követő mérések eredményei az R_x alapján azonnal leolvashatók, azaz az Ohm egységekben leolvasott R_x az $U_x = I R_x = 0.1 * R_x \text{ [mV]}$ szerint szolgáltatja a mért feszültség értékét.

4.4. Karakterisztika mérés

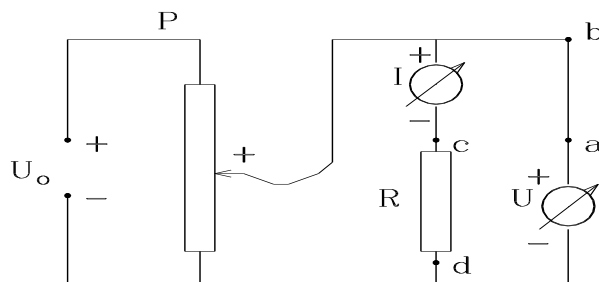
Fizikai laboratóriumokban, elektronikában gyakran használt áramköri elemek az un. két-pólusok, amelyek -what a surprise- két kivezetéssel rendelkeznek. Ilyenek az egyszerű ellenállások, diódák, tekercsek, kondenzátorok, termisztorok, izzólámpák, gázkisülési csövek, stb. Vannak olyanok, amelyek csak időben változó, vagy váltóáramú környezetben kezdenek igazán 'működni', ilyen a felsoroltak közül a kondenzátor, az önindukciós tekercs, s talán a dióda is itt találja meg élete igazi értelmét. Mások már egyenáramok esetén is fontos szerepet töltenek be.

Ezen eszközök jellemzője az un. karakterisztika, amely nem más, mint a feszültség - áram kapcsolatot megadó függvény, diagram, stb.



7. ábra. Néhány kétpólus tipikus karakterisztikája.

A karakterisztikához, tulajdonságaik alapján különféle jelzőket fűznek. Lehet lineáris vagy nemlineáris attól függően, hogy az áram és feszültség kapcsolatát lineáris függvény adja-e meg. Szimmetrikus az a kétpólus, amely a kivezetéseire kapcsolt feszültség polaritásának felcserélésére érzéketlen, azaz ugyanúgy működik (+ -) illetve (- +) polaritással kapcsolt feszültség esetén. Aszimmetrikus kétpólus eltérő áramot enged át a sarkaira kapcsolt feszültség polaritásának felcserélésekor. Ohmikus ellenállás szimmetrikus (kis áramok esetén) lineáris kétpólusként viselkedik. Félvezető dióda (inhomogén szennyezettégű félvezető) aszimmetrikus, nemlineáris karakterisztikájú kétpólus. A karakterisztika aszimmetriája miatt ezt az eszközt váltakozóáramok egyenirányítására alkalmazzák. Izzólámpa izzószála szimmetrikus, nemlineáris kétpólusként viselkedik. A nemlinearitást a magas hőmérséklet miatti ellenállásváltozás okozza.



5. Optika

A látható fény **EM** hullám, hullámhossza kb. a 350 - 800 nm ($1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$) hullámhossz tartományba esik. Ezen az intervallumon terülnek el a szivárvány színei, a hosszabb hullámhosszú vége felé a vörös színnel, a rövidebben pedig az ibolyával. Ezen intervallumon kívüli **EM** hullámokra vakok vagyunk. A látható spektrum az infravörös (IR), illetve az ultraibolya (UV) 'színeken' keresztül kapcsolódik az elektromágneses hullámok nem látható tartományaihoz. Érzékeljük ugyan bőrünkkel az infravörös sugárzás melegét, az UV sugárzástól pedig bőrpírt kapunk, leburnulunk, lehámlunk, bőrrákot kapunk, de ezek a hullámok már nem vesznek részt a fejünkbe szerelt leképező típusú érzékelő eszközünk, a szem képalkotásában.

Tudjuk az **EM** hullámok tájékaról, hogy vezető közegben a joule hő (a $P=UI$ teljesítmény térfogategységre jutó része) a közeg belső energiájává alakítja az **E**lektro**M**ágneses hullám energiáját. Azaz az **EM** hullám vezető közegbe való behatolása során, a behatolás mélységével (exponenciálisan) csökken az **EM** hullám amplitudója. A vezető közegek tehát nem átlátszók.

Elektrolitok (pl. víz alapú sóoldat) elektromos vezetési mechanizmusa -fémek elektron mozgáson alapuló vezetésével szemben - az elektronokhoz viszonyítva igen nagy tömegű ionok mozgásán alapul. Egyenáramú, vagy éppen alacsony frekvenciájú áramok esetén e nagy tömegek hatása még kevésbé jelentkezik. Azonban a fényhullámok igen magas kb. 10^{14} Hz frekvenciáját az ionok nem képesek mozgásukkal követni, így e frekvenciákon az elektrolitok szigetelőkként viselkednek, ezért átlátszók maradnak.

Ellentétben elemi elvárásainkal nem átlátszó számos elektromosan jó szigetelő anyag sem. Nem látunk át a téglán, a műanyagok egy részén, de a száraz fadarabon sem, habár a felsoroltak általában jó szigetelők. Nem látunk át továbbá az átlátszó üvegek összetöréséből származó üvegporon sem. Ezekre jellemző a szállás, szálas, szemcsés, vagy éppen a makromolekuláris szerkezet. A felsorolt izékre az a közösen jellemző, hogy az optikai tulajdonságok rendszertelenül, ugrásszerűen változnak a közegben, s a véletlenszerűen elhelyezkedő szemcsék stb. fényvisszaverő, fénytörést okozó felületeket jelentenek. Az átlátszóság feltételéhez a hullámhosszon belüli tartományig fennálló homogenitást is hozzá kell vennünk.

Az átlátszó közeg törésmutatója n azt mondja meg, hogy az illető közegbeli **EM** hullám Cn fázissebessége hányadrésze a vákuumbeli C fénysebességnek, vagyis $Cn=C/n$. A közeg dielektromos állandója a következő módon szolgáltatja a törésmutatót: $n = \sqrt{\epsilon}$, tudjuk azonban, hogy ez az epszilón nem az az epszilón, azaz az elektrosztatikában definiált relatív dielektromos állandó, és a fényhullámokra jellemző igen magas frekvencián ($\sim 10^{14} \text{ Hz}$) érvényes dielektromos állandó lényegesen különbözik. Víz esetében a sztatikus dielektromos állandó 81.1, a törésmutató pedig 1.33. A törésmutató frekvencia függésének hatása a látható fény viszonylag szűk frekvenciatartományán belül is észlelhető, pl. vízben

$$\lambda_1 = 6867 \text{ \AA} \quad n_1 = 1.3304, \quad \lambda_2 = 3968.5 \text{ \AA} \quad n_2 = 1.343 \quad (27)$$

A jelenséget, amikor is a hullám fázissebessége a hullám frekvenciájától függ, diszperzió-nak nevezzük. Ez azt jelenti tehát, hogy kevert fény esetében a különböző színű összetevők,

különböző sebességgel haladnak.

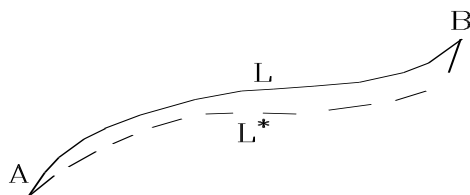
5.1. Geometriai optika

A geometriai optikai viselkedés törvényszerűségeit **EM** hullámokra érvényes törvényszerűségek $\lambda \rightarrow 0$ határeseteként kapjuk.

Fermat elve

Ha egy fényforrás által kibocsátott fény nagy részét kitakarjuk, s csak egy szűk, kis átmérőjű nyílást engedünk tovább, akkor ezt a szűk fény-nyílást fénysugárnak nevezük. Azt szeretnénk megtudni, hogy a fénysugár útját, pályáját milyen törvények írják elő. Felületes megfigyeléseink szerint a fény levegőben egyenes vonalban terjed, bár ez úgyben azonnal gyanakvóvá válunk, ha a meleg radiátor fölött nézünk át, ugyanis a mögötte látható tárgyakat remegni látjuk. A vizespohárba rakott kanál töröttnek mutatja magát, s ez már a geometriai optikának egy kicsit durvább megnyilatkozása. Reggelenként, mikor felkel a Nap, hamarabb pillanthatjuk meg a Napot, mint az a geometriai helyzetből követhetné, mert a Föld felszíne felé sűrűsödő légkörben a napsugarak görbe pálya mentén haladnak.

Alapkérdésként azt tehetjük föl, hogy mi az ami kitünteti, megkülönbözteti a fény által követett tényleges **L** útvonalat más, elképzelt **L*** útvonalakhoz képest. Erre ad választ Fermat elve, amely szerint a fény két pont közötti útvonalak közül a terjedési idő alapján választ, nevezetesen a legrövidebb terjedési idő tünteti ki a tényleges útvonalat. Mivel néhány optikai eszközünkben egy adott pontból a fénysugarak kontinuum számosságú különböző útvonalon jutnak el ugyanabba az egyetlen képpontba, ezekre már nehezen mondhatjuk azt, hogy minimum, vagy éppen hogy legrövidebb terjedési idejű pályák. Ilyen pontok, illetve sugarak jelentkeznek például gyűjtőlencsék valódi képalkotásainál. Ezért aztán a *minimum* kifejezés helyett az *extrémum* némileg általánosabb szava használatos Fermat elvében.



A ds hosszúságú ívelem v sebességgel $dt = ds/v$ időtartam alatt futható be, így Fermat extrémum elvének matematikai megfogalmazása a következő:

$$extremum = \int_{L,A}^B dt = \int_{L,A}^B \frac{ds}{v(s)} = \frac{1}{c} \int_{L,A}^B n(s) ds$$

Fermat elvét akár a geometriai optika axiómájának is tekinthetnénk, azonban igazából az **EM** hullámok elméletéből következik $\lambda \rightarrow 0$ határesetként. Illő megemlékeznünk arról, hogy mechanikában hasonló tartalmú extrémum elv(ek)be gyömöszölhetők bele a pontmechanika alaptörvényszerűségei.

Vegyük észre, hogy az utóbbi kifejezés már nem a haladási idő extrémumát írja elő, hanem az un. optikai úthosszét.

$$extremum = \int_{AL}^B n(s) ds$$

Elhagytuk az $1/c$ szorzót, amely nem változtat az integrál extrémális voltán. Az integrál az un. optikai úthosszat, vagyis a törésmutatóval súlyozott ívhosszat adja meg.

Az integrál **A**-tól **B**-ig az **L** görbe mentén ugyanazon optikai úthosszat adja, mint **B**-tól **A**-ig, azaz a fénysugár útja megfordítható.

Fermat elve közvetlen számításokra is alkalmas, ugyanakkor lehetővé teszi más, a geometriai optikában közismertebb összefüggések származtatását is. Az alábbiakban az un. Schnell-Descartes törési törvényen mutatjuk meg az elv alkalmazását.

Két átlátszó közeg **sima*** (tükröző) határfelületére érkező fénysugár intenzitásának egy része visszaverődik, a többi része behatol az új közegbe, ahol megváltozott sebességgel és megváltozott irányba folytatja az útját. Ez utóbbi jelenséget fénytörésnek nevezzük.

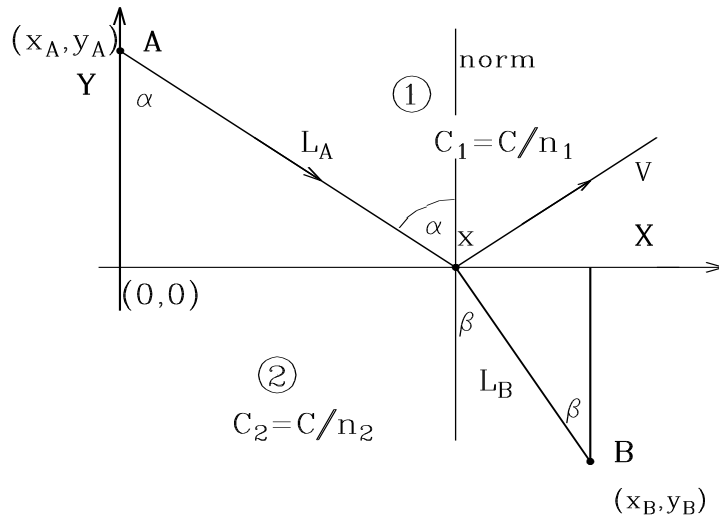
sima: Az elválasztó határfelületet simának nevezzük, ha a felület egyenetlenségének átlagos mérete sokkal kisebb az alkalmazott fény hullámhosszánál.

A jelenséget az elektromos /mágneses térre vonatkozó határfeltételek magyarázzák, azonban részletekbe nem itt most nem A lényeg az, hogyha az anyagi tulajdonságok ugrásszerűen változnak, akkor a határfeltételek szerint a beeső, és az új közegbe belépő **EM** hullámokon túl mindig megjelenik egy visszavert hullám is. A határfeltételek alapján felírt egyenletekből levezethetők nem csak a törési, visszaverődési törvények, hanem az is, hogy a beesési szögtől, a beeső fény polarizációs állapotától függően, (a beeső fénysugár elektromos tere milyen szögben hajlik a beesési síkhoz) a visszavert és az új közegbe behatoló fénysugarak milyen arányban osztoznak a beeső fény intenzitásán.

Alkalmi feladványunk most: Fermat elve alapján hogyan származtatható az ősi fénytörési törvény ?

Azt kívánjuk meghatározni, hogy az **1**-es közeg **A** pontjából milyen úton jut el a fénysugár a **2**-es közegbeli **B** pontba. Rögtön hozzá kell tennünk, hogy Fermat elvéből következik a fénysugár útjának megfordíthatósága, hiszen az integrál kezdő és végpontjának felcserélése a görbe extrémális voltán nem változtat, vagyis, **A**-ból **B**-be ugyanazon utat követi a fény mint a fordított terjedési irány esetében. A terjedési idők a következők:

$$T(x) = T_A(x) + T_B(x) = L_A/C_1 + L_B/C_2$$



8. ábra. A törési törvény Fermat elvéből levezthető. A fény A-ból B-be a legrövidebb idő alatt jut el.

A Pythagorasz tételének nagy varázslata alapján az előbbit átírjuk így:

$$T(x) = n_1 \frac{\sqrt{(x - x_A)^2 + y_A^2}}{C} + n_2 \frac{\sqrt{(x - x_B)^2 + y_B^2}}{C}$$

Keressük azt az x értéket, amelynél $T(x)$ -nek szélsőértéke van. Szélsőérték ott lehet, ahol a T -nek x szerinti első deriváltja nulla. T deriváltja a következő:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{n_1 (x - x_A)}{C \sqrt{(x - x_A)^2 + y_A^2}} - \frac{n_2 (x_B - x)}{C \sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}}$$

Trigonometriai ismereteink alapján fölismerjük a következőt:

$$\sin \alpha = \frac{(x - x_A)}{\sqrt{(x - x_A)^2 + y_A^2}}$$

Ennek alkalmazásával valamint a derivált zérus voltából adódóan kapjuk:

$$n_{21} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

Őt nevezzük a Schnellius-Descartes törési törvénynek. Itt megjelent a 2-es közeg 1-es közegre vonatkozó relatív törésmutatója az $n_{21} = n_2/n_1$. Ha $n_2 > n_1$ akkor a 2-es közeget optikailag sűrűbbnek nevezzük, az 1-est pedig optikailag ritkábbnak.

Szavakban, a törvény azt mondja, hogy a $\sin \alpha / \sin \beta$ arány a beesés szögétől független, kizárólag a két közeg anyagi minőségétől függ. A törvényből kiolvasható, ha a fény a kisebb törésmutatójú közeg felől a nagyobb törésmutatójú közegbe lép, akkor fénysugár a beesési merőleges felé törik, azaz a nagyobb törésmutatójú közegbeli megtört fénysugár kisebb szöget zár be a beesési merőlegessel, mint a beeső fénysugár. Röviden, ha $n_2 > n_1$ akkor $\beta < \alpha$. Mivel a fénysugár útja megfordítható, ezen állítások visszafelé is olvashatók. A nagyobb törésmutatójú közegből a kisebb törésmutatójú közegbe lépő fénysugár nagyobb szöget zár be a beesési merőlegessel, mint az optikailag sűrűbb közegben. Ez utóbbi esetben, ha növeljük az optikailag sűrűbb közegből a ritkább felé haladó fénysugár beesési szögét, akkor a ritkább közegben haladó fénysugár beesési merőlegessel alkotott szöge rohamosabban nő, mint a fénysugár sűrűbb közegbeli szöge. Így találunk egy olyan ún. β_h határszöveget, amelyhez tartozó α szög már derék. Ezen szög alatt, és ettől nagyobb β beesési szöggel érkező fénysugarak már nem tudnak belépni az új, kisebb törésmutatójú közegbe. A két közeg határfelületén lejátszódó törési és visszaverődési jelenségek közül csak a visszaverődés marad meg, s visszavert fénysugár örökli a beeső fénysugár teljes intenzitását. A jelenséget teljes visszaverődésnek nevezzük, s ennek határszöge a következőkből számítható:

$$n_{21} = \frac{\sin(\pi/2)}{\sin \beta_h} = \frac{1}{\sin \beta_h}$$

A környezettől különböző törésmutatójú anyagokból, tükröző felületekből egyszerű optikai eszközöket építhetünk, lencsákat, prizmákat, gömbtükröket. Ezeket azután bonyolultabb eszközökké rakhatjuk össze.

Lencsetörvény

A lencsék átlátszó, környezetüktől különböző törésmutatójú anyagokból készülnek. A lencse két oldalát r_1 és r_2 sugarú gömbfelület darabok határolják. A görbületi középpontokra illeszkedő egyenest optikai tengelynek nevezzük. A konvex (domború) gömbfelület görbületi sugarát pozitív, a homorú (konkáv) felület görbületi sugarát negatív előjelűnek tekintjük. Domború üveglencsék levegőben gyűjtőlencseként viselkednek. Ez azt jelenti, hogy az optikai tengellyel párhuzamosan érkező fénysugarak a lencse túloldalán egy pontban, az ún. fókuszpontban metszik egymást, azaz a párhuzamos fénysugarakat egy pontba gyűjti. A jelenség, a lencsét határoló (belépő, és kilépő) felületeken bekövetkező fénytörések következménye, azonban az ún. vékony lencsék esetén a fénytörési eseményeket úgy kezeljük, mintha egyetlen törési síkon következnenek be. A fókuszpont lencsétől (azaz a törősíktól) mért távolságát fókusz-távolságnak nevezzük. A fénysugarak útja megfordítható, ezért a fókuszpontból kiinduló (azon átmenő) fénysugarak a gyűjtőlencse túloldalán az optikai tengellyel párhuzamosan haladnak. A fókusz-távolság a lencse két oldalán ugyanaz, azaz a 'jobbról' érkező fénysugarakkal, illetve a 'balról' érkező fénysugarakkal a lencse azonos módon viselkedik.

Üvegből készült homorú (konkáv) lencsék levegőben szórólencseként viselkednek, azaz az optikai tengellyel párhuzamosan érkező fénysugarak a lencse túloldalán divergálnak, szét-

tartanak, mégpedig oly módon, *mintha* a fénysugarak érkezési oldalán levő pontból -a szórólencse fókuszpontjából- indulnának ki. Itt tehát a fénysugarak nem metszik egymást a fókuszpontban, azonban, ha a széttartó sugarakat képzeletben visszafelé meghosszabbítjuk, akkor e meghosszabbítások metszéspontja jelöli ki a szórólencse fókuszpontját. Szórólencsék fókusz-távolságát negatív, gyűjtőlencsék fókusz-távolságát pozitív érték-ként kezeljük.

Lencsék fókusz-távolságát a lencse geometriája és a lencse anyagának környezetére vonatkoz-tatott relatív törésmutatója határozza meg.

$$\frac{1}{f} = (n_r - 1) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad (28)$$

A relatív törésmutató, az $n_r = n_{lencse}/n_{kornyezet}$ összefüggése alapján, az adott lencsére optikailag ritkább közegben 1-től nagyobb is , és optikailag sűrűbb közegben 1-től kisebb is lehet. Ez tehát azt jelenti, hogy pl. levegőben gyűjtőlencseként viselkedő lencséből akár szórólencse is lehet egy másik közegben.

Mint tudjuk, a törésmutató függ az alkalmazott fény hullámhosszától, azaz a fény színétől. A jelenséget diszperzió-nak nevezzük (lásd 27), s segítségével az összetett fényt (pl. a fehér fényt) összetevőire bonthatjuk, lencsénél azonban a jelenség az un. színi hibához, vagy más szóval a kromatikus lencsehibához vezet. A lencse fókusz-távolságát megadó (28) formula azt mondja nekünk, hogy a lencse fókusz-távolsága más-más lesz a különböző színek-re. Ennek következménye az, hogy ha erős nagyítású távcsövekbe nézünk, akkor a tárgyak kontúrját szivárványszerű 'glória' övezi.

Jobb minőségű eszközöknél, fényképezőgépeknél színi hibamentes, un. akromatikus lencserendszereket alkalmaznak, amelyek lencsési különböző diszperziójú anyagból készül-nek, s ezek egymás színi hibáit a látható spektrumban képesek kompenzálni.

Szóró, gyűjtőlencsék-re, gömbtükrök-re egyaránt érvényes az un lencsetörvény :

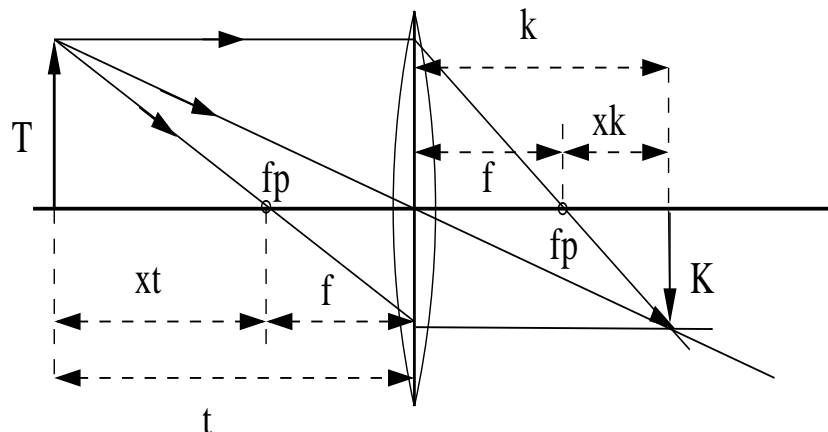
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k} \quad f^2 = x_t x_k$$

Minimális kézügyességgel igazolható ugyanezen lencsetörvény Newton féle alakja - a második összefüggés a fenti sorban-, amely mind a tárgy távolságát, mind pedig a kép távolságát a megegyező oldali fókuszponttól méri azaz $t = f + x_t$ $k = f + x_k$. Ezek behelyettesítésével jutunk a Newton féle alakhoz.

A méterben kifejezett fókusz-távolság reciprokát **Dioptriának** nevezik. Ezzel a szemüve-glencse un. törőképességét jellemzik. Eszerint egy 2 dioptriás szemüveg fókusz-távolsága **$f = 0.5 m$** .

Az (9) ábrán valódi képalkotásban szerepet játszó fénysugarak közül rajzoltunk be néhányat. Az itt feltüntetett sugarak a valóságban lejátszódó képalkotás során nem ját-szanak kitüntetett szerepet, csupán számunkra -együgyű emberi lények számára- könnyítik meg ezek a képszerkesztést. A képszerkesztések során leggyakrabban alkalmazott sugarak a következők;

- az optikai tengellyel párhuzamos sugarak a fókuszpont-on haladnak át. Gyűjtő lencse esetén a túloldali fókuszpont-on mennek át, szóró lencse esetén úgy haladnak, mintha a tárgyoldali fókusz-ból indulnának.



9. ábra. Gyűjtőlencse képalkotása.cd

- a lencse közepén áthaladó sugarak iránya nem változik. Meg kell azonban jegyeznünk, hogy ahogy azt a planparallel lemezen (párhuzamos síklapokkal határolt közeg) áthaladó sugarak esetén is láttuk, úgy itt is az átmenő sugár párhuzamosan eltolódik a beeső sugárhoz viszonyítva.
- a tárgyoldali fókuszpontra áthaladó sugarak a túloldalon az optikai tengellyel párhuzamosan haladnak.
- azok a sugarak amelyek az optikai tengelyt a kétszeres fókusz távolságban metszik, túloldalon is a kétszeres fókusz távolságban metszik az optikai tengelyt. Ezt a sugarat az ábrán nem rajzoltuk meg.

A tárgy (egy pontjának) valódi képe ott keletkezik, ahol a tárgy egy pontjából kiinduló fénysugarak újra metszik egymást. Ide ernyőt (pl. egy sima, fehér papírlapot) helyezve kapjuk a tárgy valódi képét. Ha a Fermat elvre gondolunk, azonnal belátjuk, hogy itt a tárgy egy pontjából a képpontba megszámlálhatatlanul sok különböző úton jut el fénysugár. Ezek mindegyike megfelel Fermat elvének, azaz a terjedési idő, illetve az optikai úthossz ezek mindegyikénél ugyanaz. Ez egyúttal azt is jelenti, hogy az egyes sugarak között nem lép fel fáziskülönbség.

Virtuális kép esetén a tárgy egyes pontjaiból kiinduló fénysugarak nem metszik egymást, a fénysugarak meghosszabításai illetve ezen meghosszabított sugarak metszései jelölik ki a virtuális kép helyét. A virtuális kép tehát ernyőn nem fogható föl. Amikor szemünkkel egy virtuális képet nézünk, úgy érzékeljük, a képet, mintha a fénysugarak a virtuális képből indulnának ki (a virtuális képekre legjellemzőbb szó a „*mintha*”). Számolásainkban a virtuális képet negatív képtávolság jelzi.

Legtöbb optikai eszközünk több lencsét alkalmaz. Ezek sugármenetének szerkesztése és számítása láncolható, azaz az egyik lencse által létrehozott kép a következő lencse tár-

gyaként kezelendő. Ez ugyan egyszerűnek tűnik, de némi gondolkozást igényel, ha a kép a rákövetkező lencse után keletkezik.

A fentiekben közölt leképezési törvények, sugármenetek csak az optikai tengely közelében haladó, a tengellyel nem túl nagy szöget bezáró sugarakra működnek tökéletesen. Ezeket a sugarakat paraxiális sugaraknak nevezzük. Távlabbi, valamint a nagyobb szögek alatt haladó fénysugarak esetén már különböző lencsehibák hatásai jelentkeznek. Ilyen sugarak esetén egy pont képe már nem pont, hanem folt lesz, illetve egy tárgynak alkalmazott négyzetrács képe párnaszerűen torzul, stb. Ezért ezeket a sugarakat gyakran kitakarják pl. állítható nyílású blendékkel. A kitakarás ugyan javítja a kép élességét de ezért a kép fényerő csökkenésével kell fizetnünk. Ez egyébként a fizikában és más területeken is megjelenő komplementaritási elv egy világos megnyilvánulása. A komplementaritási elv itt azt jelenti, hogyha a kapott eredményünk (képünk, mérési adataink) bizonyos tulajdonságait javítani akarjuk, akkor ezért rendszerint más tulajdonságok romlásával kell fizetnünk.

Szemünk pupillája kisebb fényerő -valamint érzelmileg pozitív vizuális inger- esetén kitágul, a nagyobb fényerő hatására beszűkül. Ez utóbbi esetben a beszűkült pupilla kiszűri a hibás leképezést okozó fénysugarak egy részét, látásunk javul. A megvilágítás erősségének növelésével öregedő szemünk számára alkalmmilag nyerhetünk néhány dioptriát.

6. A modern fizika alapjai

-A korlátozott óraszám miatt csak a legalapvetőbb tényeket tudjuk megemlíteni.-

A fizika jelentős sikerei ellenére a XIX. század végén, a XX. század elején maradt néhány olyan megválaszolatlan kérdés, amelyek kapcsán szemléletében, formalizmusában az előbbiektől olymértékben különböző elméletek születtek, hogy nyomban el is nevezték az összes addigi fizikát klasszikus fizikának.

Atomi méretekhez a fizikát alapvetően át kellett szabni. Az új fizikában -amely egyébként kvantummechanika, hullámmechanika, stb. néven vert gyökeret - a klasszikus fizikában megszokotthoz képest néhány alapvetően új, idegenszerű jelenség mutatkozik. Két alapvető dolog sorolható ide:

- egyes fizikai rendszerekben a fizikai mennyiségek **kvantált**, azaz nem folytonos, darabos, szemcsés, meghatározott adagokból álló természete.
- a **részecske hullám dualitás** (kettős természet) és ennek vetületei, úgymint determinisztikus és valószínűségi törvények.

Az atomi elektronok, vagy általában a kötött rendszerek, jól meghatározott energiaállapotokkal jellemezhetők. A rendszer csak ezen megengedett állapotok valamelyikében lehet. Az ilyen rendszer környezetéből csak akkor képes energiát fölvenni, ha az pontosan megfelel egy elérhető magasabb energiájú állapot és a kiindulási állapot energiájának különbségével.

A kvantum (quantum) szó is innen ered, és (többé-kevésbé) tovább nem osztható mennyiséget, adagot jelent.

Meg kell azonban említenünk, hogy az a tény, hogy bizonyos fizikai mennyiségek az adott fizikai rendszernél csak meghatározott értékek lehetnek, a klasszikus fizikától sem idegen, hiszen a membránok, húrok, légoszlopok rezgései, frekvenciái, és egyes rezonanciajelenségei pontosan megfelelnek e 'kvantum' viselkedésnek. Alapvetően és lényegileg újnak mondható azonban, hogy a klasszikus fizika abszolút elkülönült részecske, és hullám jelenségeivel szemben a kvantummechanika egybeötvözi e kettőt a részecske-hullám dualításban. A klasszikus fizikából örökölt *vagy részecske vagy hullám* helyébe a *részecske és hullám* kép lépett.

6.1. A hullámfüggvény, megtalálási valószínűség.

A klasszikus fizika legalapvetőbb fogalmait a tömegpont -azaz részecske- kinematikáján, dinamikáján keresztül vezettük be. A kvantummechanika centrális fogalma viszont a részecske *hullámfüggvénye*. A részecske és a környezetet reprezentáló potenciáltér egy fizikai rendszert alkot. A részecske fizikai rendszerbeli állapotát e komplex értékű hullámfüggvény jellemzi. Közvetlen fizikai jelentése nincs, azonban a részecskéről, annak állapotáról a hullámfüggvény segítségével minden fizikailag lényeges információ kibányászható.

A hullámfüggvény általában a hely és az idő függvénye $\psi(\vec{r}, t)$. Ha a hullámfüggvény nem tartalmazza az időt, akkor az egy részecske állapotot ír le. A hullámfüggvény abszolútérték négyzete (saját komplex konjugáltjával való szorzata) nagyon fontos és szemléletesen értelmezhető mennyiséghez vezet. Az abszolútérték négyzet $d\mathbf{x}$ -el való szorzata megadja a részecske \mathbf{x} hely, $d\mathbf{x}$ környezetében való megtalálás valószínűségét:

$$|\psi(x)|^2 dx = \psi'(x) \psi(x) dx$$

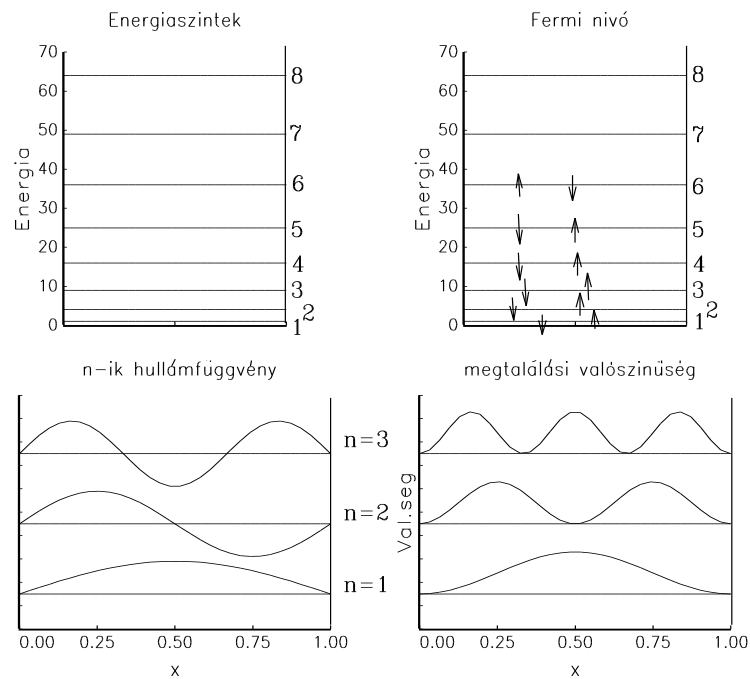
Az egyszerűség kedvéért itt is, és a továbbiakban is egy dimenziós eseteket tekintünk. Az itt elkövetett megfontolások egyszerűen általánosíthatók három dimenzióra is.

Ha a részecske egy a élhosszúságú dobozban van (mint pl. egy fémkockában levő elektron) akkor:

$$1 = \int_0^a |\psi(x)|^2 dx$$

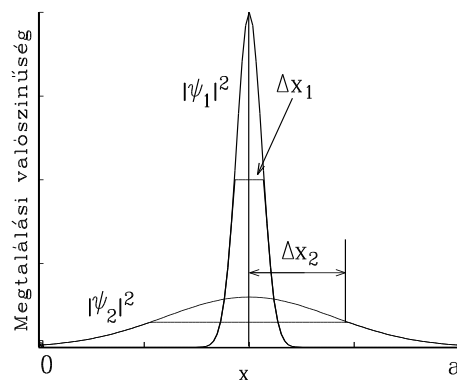
Számítógépen erre azt mondja a tanerő, hogy a hullámfüggvény a $[0, a]$ intervallumon négyzetesen integrálható és egyre normált. Fizikaórán ez azt jelenti, hogy a részecske 'létezik', és a $[0, a]$ intervallumon egységnyi valószínűséggel megtalálható, azaz a részecske valahol a 0 és az a pont között van.

A részecskét (~leíró hullámfüggvényt) jól lokalizálnak nevezzük, ha a megtalálási valószínűség egyetlen hely szűk környezetében különbözik nullától, s szétfolytnak, ha a szóbanforgó tartomány jelentős területein a megtalálási valószínűség nullától különbözik. A klasszikus fizika pontszerű részecske modelljéhez a jól lokalizált hullámfüggvénnyel leírt részecskeállapot közelít leginkább.



10. ábra. Dobozba zárt részecske lehetséges energiaértékei. Az első néhány hullámfüggvény, és a megtalálási valószínűségek. Betöltött, és a betöltetlen állapotú energianívók határán van az ún. Fermi nivó.

A részecske helyzetének határozatlansága



11. ábra. Megtalálási valószínűség, és a határozatlanság.

A klasszikus fizika különböző részeiben rendszerint akkor kaptunk statisztikai kijelentéseket, ha sokrészecske rendszerünk volt, esetleg egy rendszert sok példányban de különböző állapotokban képzeltünk el, itt azonban az a meghökkentő tény jelenik meg, hogy már egyetlen részecske esetén is csupán valószínűségi kijelentéseket tehetünk. A kvantummechanikai ósatyák (az elmélet kifejlesztői) egy része a hullámmechanika ezen alapvető tényét sohasem akarta elfogadni.

Az (11) ábrán egy részecske megtalálási valószínűségét szemléltetjük két (1-es és 2-es) állapotban. Ha ismételt kísérletekkel megpróbáljuk a részecskét a $(0, a)$ intervallum különböző pontjai környékén elkapni, akkor az egyes kísérletek során vagy az egész részecskét sikerül megfognunk, vagy semmit sem. Ha ábrázoljuk különböző x koordinátáknál a sikeres kísérletek arányát (vagyis, hogy próbálkozásaink hányadrésztében sikerült a részecskét az egyes x értékek környékén megtalálnunk), akkor az (11) ábrához hasonló empirikus eloszlást kapunk. A megtalálás x koordinátájának várható értékeként (átlagos x) mindkét állapotra ugyanaz az $a/2$ érték adódik, azonban látjuk, hogy amíg az 1-es állapotú részecskét csak az $a/2$ koordináta szűkebb környezetében találhatjuk meg, a 2-es állapot esetén a részecskét jelentős valószínűséggel megtalálhatuk az $a/2$ jóval tágabb környezetében is. A megtalálási x koordinátájának ezt a határozatlanságát valamilyen Δx mennyiséggel jellemezhetjük. Erre a standard deviációt használjuk.

$$p_x = mv_x$$

A határozatlansági reláció

A Heisenberg féle *határozatlansági reláció* egyes fizikai (un. kanonikusan konjugált) mennyiségpárok határozatlanságát jellemző Δ mennyiségek között állapít meg kötelező érvényű kapcsolatot.

$$\Delta p_x \Delta x \geq h/4\pi$$

Itt ugyan csak x -re írtuk fel, de y -ra, z -re is hasonló forma adódik.

A határozatlansági reláció azt mondja, hogy nem lehet egyidejűleg tetszőleges pontossággal megadni egy részecske helyét (x koordinátáját) és impulzusát (lendületét). Itt nem arról van szó, hogy esetleg az alkalmazott mérési eljárás okozza ezt a bizonytalanságot (bár kétségtelen, hogy a mérés módosítja az eredeti állapotot), vagy hogy *mi* nem tudjuk megadni, hanem, arról, hogy ezen mennyiségek egyidejű meghatározottsága ilyen törvényt követ.

Ha a részecske jól lokalizált (Δx kicsi), akkor szinte semmit nem tudunk mondani a részecske lendületéről (Δp_x szükségképpen nagy kell hogy legyen). Ugyanezt fordított irányban is $-x$, p_x szerepcserével elmondhatjuk, azaz élesen meghatározott impulzus esetén, a részecske szükségképpen szétfolyt. Ez persze helyből kilövi a lovat a klasszikus pontmechanika egy alapfeladvány típusa alól, nevezetesen amikor az eredő erő és a kezdeti feltételek ismeretében a tömegpont további mozgását akarjuk meghatározni a mozgásegyenlet megoldásával. Ugyanis a kvantummechanikában már a klasszikus fizika által igényelt kezdeti feltételeket sem tudjuk megadni, hiszen pontosan megadott kezdeti helykoordináta

esetén a megfelelő $V_{ox} = p_{ox}/m$ sebességkoordináta akármi lehet az impulzuskoordináta határozatlansága miatt.

A határozatlansági reláció tiltja meg, hogy kis tömegű részecskét kis térrészbe könnyedén betuszkoljunk, pl. emiatt nem lehetnek elektronok az atommagban. Ha egy m tömegű részecskét egy a élhosszúságú dobozba zárunk (egy dimenzióban számolgatunk), akkor a részecske x koordinátájának határozatlansága csak kisebb lehet mint a doboz élhossza. A határozatlanságot a következő alakban adhatjuk meg: $\Delta x = \eta a$ ahol $\eta < 0.5$, egyenletes valószínűsűrség esetén $\eta \approx 0.3$. Ebből a lendület határozatlansága kifejezhető:

$$\Delta p_x \eta a \geq h/4\pi \quad \Delta p_x \geq \frac{h}{4\pi \eta a}$$

A $V = p/m$ alapján a lendület határozatlanságához mozgási energia társul.

$$W_m = 1/2 m V^2 = p^2/2m \quad \Rightarrow \quad W_m = \Delta p_x^2/2m \geq \frac{h^2}{32\eta^2\pi^2} \frac{1}{m a^2}$$

A részecske akkor lesz kötött állapotban, ha az összenergia negatív, azaz a (negatív) potenciális energia értéke abszolút értékben nagyobb mint az impulzus határozatlansághoz tartozó W_m mozgási energia. A fentiek alapján például könnyen beláthatjuk, hogy pl nem tartózkodhat elektron az atommagban. Elektron tömeg, és atommag méretű doboz esetén ez $W_p \approx 10^9 eV$ lenne. Egyébként a protonok, neutronok átlagos magbéli kötési energiája $8 \cdot 10^6 eV$ környékére esik, s ez nagyságrendekkel alulmúlja az elektron atommagba kötéséhez szükséges energiát.

$$\Delta E \Delta t \geq h/4\pi$$

6.2. A foton

Az elektromágneses sugárzás (azaz hullám) részecske természetű energiadagját fotonnak nevezzük. A foton energiája ν frekvenciájával arányos, az arányossági tényező az ún. Planck állandó $h = 6.625 \cdot 10^{-34} \text{ Joule} \cdot \text{sec}$.

$$E = h \nu$$

A Planck állandó éppúgy alapvető természeti állandó mint pl. a fénysebesség, vagy az univerzális gravitációs állandó, stb. Kvantummechanika, atomfizika, atommagfizika, molekulafizika, lézerfizika, szilárdtestfizika, sztatistikai fizika (kvantumstatistikák), sugárzáselmélet, stb kiterjedten használják.

A foton csak fénysebességgel haladó állapotban létezik. A tömeg-energia ekvivalenciát megfogalmazó Einstein féle $E = mc^2$ összefüggéssel a fotonhoz tömeget is rendelhetünk $m_f = h\nu/c^2$. Ezt a tömeget relatív tömegnek nevezzük, a fotonnak nyugalmi tömege nincs (mint ahogy nyugalmi állapota sincs). Két jelenségkörben játszott szerep alapján kétféle tömegről beszélünk, gravitációs kölcsönhatásban a súlyos tömeg, a sebességváltozás, lendületváltozás, ütközések címszavakkal jellemezhető jelenségcsoportban pedig a tehetetlen tömeg játszik szerepet.

Mint ahogy a Földön eldobott kő parabola pályán mozog a Föld vonzása miatt, vagy az üstökösök pályája Nap közelében erősen görbült lesz, ugyanúgy a Nap közelében elhaladó fénysugár pályája is elhajlik. A jelenség a foton tömegének gravitációs, vagy ha úgy tetszik, súlyos oldalát mutatja.

A foton nevű „részecske” p impulzusa - lendülete - $p = h\nu/c = h/\lambda$ formában adható meg. Ezen részecske impulzusa igen jelentős fizikai következményekkel jár. Ahogy azt az ideális gázoknál láttuk, a tárolóedény faláról visszapattanó molekulák a lendületváltozás során nyomást fejtenek ki az edény falára, ugyanígy mind az elnyelődő, mind pedig a visszavert (tükrözött) fotonok is nyomást hoznak létre az érintett felületeken. Ez a nyomás ugyan hétköznapi viszonyok között alig mutatható ki, azonban a csillagok -így a Nap- egyensúlyában is a hőmérsékleti sugárzás fotonjaitól származó nyomásnak centrális szerepe van. A korosodó csillagok hidrogén üzemanyagának csökkenése folytán bekövetkező **gravitáció - sugárzási nyomás** egyensúly megbomlása látványos csillagrobbanásokhoz, nova és szupernóva jelenségekhez vezet.

A foton, perdülete (impulzusnyomatéka) alapján az un. egész spinű (perdületű) részecskék családjába tartozik. Ezek perdületét $L_z = n h/2\pi$ összefüggéssel lehet megadni ahol n egész szám. Az ilyen részecskékből álló sokrészecske rendszerek statisztikus viselkedését Bose és Einstein írták le, ezért az egész spinű részecskéket **bozonok**nak is szokás nevezni.

Fotoeffektus

A megvilágított fémfelületből a megvilágítás hatására elektronok lépnek ki, s az elektronkilépés azonnal követi a megvilágítást. A jelenség ugyan szigetelő felületen is lejátszódik, de mivel a kiütött elektronokat az anyag belseje felől semmilyen vezetési mechanizmus nem pótolja, a kialakuló pozitív felületi töltéssűrűség -elektronhiány- megakadályozza a további elektronkilépést. Fenntartható folyamatként fotoeffektus -fényelektromos hatás- tehát csak vezetőknél figyelhető meg. Azt a jelenséget, hogy a rosszul vezető felületek a megvilágítás látens (rejtett) képét felületi töltéeloszlás formájában képesek hosszabb, rövidebb ideig megőrizni, a mindennapi használatunkban levő lézernyomtatók, fénymásolók hasznosítják.

A jelenséget külső fotoeffektusnak nevezik, föltehetően azért, mert ennek során az elektron elhagyja a megvilágított felületet. Belső fotoeffektus jelenségében a megvilágított szigetelők, félvezetők elektromos vezetőképessége megnövekszik. A jelenség annak tulajdonítható, hogy a megvilágítás hatására a mozgásra képes töltéshordozók koncentrációja növekszik meg a megvilágítás időtartamára.

A folyamatot kiváltó megvilágítást két adattal jellemezzük, a megvilágító fény színe (azaz ν frekvenciája), vagy általánosabb esetben spektrális összetétele, valamint a megvilágítás intenzitása (erőssége). Amikor azt mondjuk, hogy a megvilágítás erősségét növeljük, akkor hozzágondoljuk, hogy ezt változatlan spektrális összetétel mellett tesszük.

A folyamat során bekövetkező elektronkilépést két adattal jellemezhetjük: a kilépő elektronok (mozgási) energiájával - energiaeoszlásával, valamint az időegységenként kilépő elektronok számával. A kísérletek azt tanúsítják, hogy az intenzitás növelése nem befolyásolja a kilépő elektronok energiáját, ekkor csupán a időegységenként kilépő elektronok

száma növekszik meg. A kilépő elektronok energiája, a megvilágító fény frekvenciájától függ adott fotokatód esetén. Einstein képlete szerint a foton $h\nu$ energiája egyetlen lépésben elnyelődik, ez egyrészt fedezi az adott anyagra jellemző, az elektron kiléptetéséhez szükséges $W_{kilep.}$ munkát, a maradék energia a kilépő elektron mozgási energiájában jelenik meg. Einstein fényelektromos hatásra vonatkozó összefüggése a következő:

$$h\nu = W_{kilep.} + W_{mozg.}$$

Meg kell jegyeznünk, hogy a fenti forma csak a legnagyobb energiájú elektronokra áll fenn, általánosabb a $h\nu \geq \dots$ egyenlőtlenséggel felírt alak. Az egyenlőtlenség azt jelenti, hogy nem csak a fém legnagyobb energiaállapotban levő elektronjai léphetnek ki a fotoeffektus folytán, hanem a mélyebb energiaszintekről is történhet kilépés. A továbbiakban számításainkat a legnagyobb energiájú elektronokra végezzük el, azaz az egyenlőséget fogjuk használni.

Ha a megvilágítást kisebb frekvenciájú fényel követjük el, akkor a jobboldalon, csak a kilépő elektron mozgási energiája csökkenhet, mivel a kilépési munkát a megvilágított felület anyaga meghatározza. A mozgási energia legkisebb értéke nulla, így egy küszöbfrekvencia alatt a fényelektromos jelenség már nem figyelhető meg. A küszöbfrekvenciánál a fotonenergia éppen fedezi a kilépési munkát.

$$h\nu_k = W_{kilep.}$$

Elektronkilépés csak ezen küszöbfrekvencia fölött van.

A fotoeffektus során kilépő elektronokat egy rácscsal gyűjtjük ki, ezen töltések árama az un. fotoáram. Ha a rácsra negatív U feszültséget kapcsolunk, akkor csak azok az elektronok képesek az elektródára feljutni -így a fotoáramhoz hozzájárulni- amelyek kezdeti mozgási energiája nagyobb vagy éppen egyenlő az elektromos tér ellen végzendő qU munkánál. Ha ezt az U ellenteret fokozatosan növeljük, akkor elérhetünk egy olyan feszültségértéket, amelynél a fotoáram éppen eltűnik. Ekkor a legnagyobb energiájú elektronok energiájára fennáll $W_k = qU$. Vagyis az elektronok mozgási energiáját mérni tudjuk. Ez lehetővé teszi a h Planck-féle állandó viszonylag egyszerű laboratóriumi meghatározását. Ha ugyanis egy ν_1 frekvenciájú fényenél U_1 a fotoáramot megszüntető ellenfeszültség, és ν_2 frekvenciánál fényenél U_2 , akkor fennállnak a következők:

$$h\nu_1 = W_{kilep.} + qU_1$$

$$h\nu_2 = W_{kilep.} + qU_2$$

Kivonás után kapjuk:

$$h = q \frac{U_2 - U_1}{\nu_2 - \nu_1}$$

Itt értelemszerűen q az elemi töltést jelöli.

A jelenség egykori fontossága abban van, hogy a fényelektromos hatás csak a fény részecske természetű oldalával magyarázható.

Van még néhány olyan jelenség amely elektronkilépéshez vezet, s e jelenségek némelyike igen fontos alkalmazási területeket is talált.

Termikus elektronemisszió

Izzó fémek, fémoxidokkal bevont vezető felületek elektronokat bocsátanak ki. A jelenség az elektronok energiaeloszlása, illetve impulzus eloszlása alapján magyarázható, s leginkább a folyadékok párolgásához hasonlítható. Számítógép monitorok, TV készülékek képcsöveinek elektronágyú manapság is e jelenség alapján működnek de az 1950-60 -as évekig az egész elektronikai ipar a termikus elektronemisszió alapján működő vákuumsövekre épült.

Téremisszió

Tudnunk kell, hogy az elektrosztatikus térerősség kis görbületi sugarú élek, hegyek mentén lehet igen nagy. Nagy külső térerő esetén a hideg felületből is történhet elektronkilépés, se jelenséget nevezük téremissziónak. Az emisszió folyamatában fontos szerepet játszik az ún. alagúteffektus.

Másodlagos elektronkilépés.

Ha felgyorsított elektronokat kis kilépési munkával jellemezhető fémfelületbe, vagy speciális bevonatú vezetőbe ütköztetünk, akkor a beeső primer elektron energiájától függően több elektron is kiléphet a felületből. Számos eszköz alkalmazza az elektrosokszorozás elvét, amikor is e másodlagos elektronokat újra és újra gyorsítva ismételten lejátszatjuk különböző elektródafelületeken -egyre növekvő számú elektronnal- a jelenséget, így a primer elektronok számával arányos felerősített elektromos jelet kapunk. Képerősítők, nukleáris detektorok alkalmazzák.

6.3. Spektrumok típusai

A fehér színt szuperszínnek nevezhetjük, mivel minden színt tartalmaz, a fekete pedig fizikai értelemben nem szín, hanem a színek (és így a fényintenzitás) abszolút hiánya. Az összetett fény, így a fehér fény is optikai rácsokkal, diszperzív átlátszó anyagokból (üveg, kőszó, műanyag, víz, stb.) készített prizmákkal összetevőire bontható. Azt a függvényt, amely megadja, hogy az adott fényben milyen színek -milyen hullámhosszu vagy frekvenciájú összetevők- milyen súllyal illetve fizikai intenzitással vannak képviselve, az illető fény optikai spektrumának nevezük. Spektrumokat természetesen nem csak, a látható hullámhossz tartományban vizsgálunk. Infravörös, illetve ultraibolya, stb. hullámhossz tartomány spektrumai is fontos fizikai információkat tartalmaznak. Az olyan spektrumokat, amelyekben széles hullámhossz tartományokat nulla intenzitás jellemez, s nullától különböző intenzitásokat csak néhány, - esetleg nagyon sok, de megszámlálható- hullámhossz

érték viszonylag szűk környezetében mérhetünk, vonalas spektrumoknak nevezzük. Vonalas spektrumot bocsátanak ki magas hőmérsékletű, ritka gázok. Pl. láng, elektromos szikra, ív. A spektrumvonalak pozíciói, vagyis, hogy milyen hullámhossznál (színnél) jelennek meg, a fényt kibocsátó kémiai elemre jellemzőek. Ezen vonalak spektrumbeli jelenlétével a kémiai összetevők azonosíthatók, a vonalintenzitások aránya alapján koncentrációkra következtethetünk. Molukulák által kibocsátott fény spektrumában a vonalas összetevőn túl ún. sávós spektrum is megjelenik. E spektrumfajta nevét onnan kapta, hogy a molekulára jellemző hullámhossz tartomány(ok)ban, sok, egymáshoz közeli vonalat találunk. E sávok megjelenése a molekula forgásával, illetve a molekulát alkotó atomok vibrációival (rezgéseivel) kapcsolatos.

Folytonos spektrumú elektromágneses sugárzást bocsátanak ki a forró, viszonylag nagy sűrűségű (nem gáznemű) testek, pl. egy izzószál, folyékony láva, stb. A folytonos spektrumban minden hullámhossz képviselve van, és a szomszédos hullámhosszak intenzitásai folytonosan kapcsolódnak egymáshoz. Vagyis a spektrumban nincsenek ugrásszerű intenzitásváltozások.

A 'természetes' -azaz a hőmérsékleti sugárzás eredetű- fehér fény folytonos spektrumú, azonban fehér fényérzetű kevert fényt három vonalas (csak meghatározott hullámhosszat) tartalmazó fényből is ki tudunk keverni. Ezen az ún. additív színkeverésen alapul a színes képszoftverek működése. Ezeknél három ún. alapszín alkalmazásával, azaz megfelelő arányú keverésével érik el a kívánt színhatást. Ezek a többé, kevésbé önkényesen megválasztott alapszínek a vörös, zöld, és a kék. (azaz az RGB Red, Green, Blue). Egy színes képernyő egy képpontja (más néven PICTure ELEMent összevont néven pixel) e három alapszínt kibocsátó három kicsiny felületdarabkából áll.

Ha az így kapott fehér fényt pl. prizmával felbontjuk, akkor a spektrum csak az RGB intenzitásoknak megfelelő vonalakat fogja mutatni. Ez a fehér fény tehát vonalas spektrumú.

6.3.1. A hőmérsékleti sugárzás

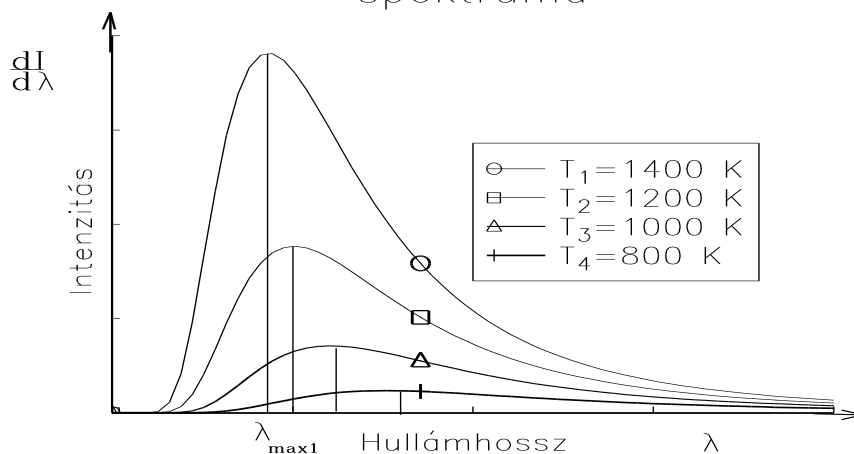
Wien féle eltolódási törvény.

Adott hőmérséklethez tartozó hőmérsékleti sugárzás spektrumának egy jellegzetes pontja az a hullámhossz, amelynél a spektrumgörbének maximuma van. Ezt a hullámhosszat λ_{max} -al jelöljük. Mivel a sugárzás intenzitásának jelentős része ezen szín környezetéből származik, λ_{max} egyúttal a sugárzás színét is meghatározza. Wien eltolódási törvénye a sugárzás maximális intenzitású hullámhossza, és a sugárzást kibocsátó test abszolút hőmérséklete közötti kapcsolatot fogalmazza meg:

$$\lambda_{max} * T = konst \quad (29)$$

A konstans értéke $2.88 \cdot 10^{-3} m K$ (azaz **m**éter **K**elvin egységben).

Hőmérsékleti sugárzás spektruma



12. ábra. Hőmérsékleti sugárzás spektruma.

Az törvényt nézegetve azt látjuk, hogy a hőmérséklet növekedésével a maximális intenzitás az egyre rövidebb hullámhosszakra tevődik át. Amint egy testet melengetni kezdünk, elsőként a vörös szín jelenik meg, magasabb hőmérsékleten a színe narancssárgára változik, majd kékre.

A törvény alapján kiszámíthatjuk az 5800 K -es Napfelszín hőmérsékleti sugárzásának maximális intenzitású hullámhosszát: $\lambda_{\max} \cong 5000\text{ \AA}$. ($1\text{ \AA} = 10^{-10}\text{ m}$ sárgászöld). Itt meg kell jegyeznünk, hogy a Napból származó sugárzás nem egyetlen jól meghatározott hőmérsékletű rétegből származik, hanem lényegesen különböző hőmérsékletű rétegek sugárzásai is adnak járulékot a teljes sugárzási spektrumhoz. A fenti adatokat célszerű csupán valamilyen idealizált értékeknek tekinteni. Sajátos eredménye az emberi szem evolúciójának az a tény, hogy az emberi szem érzékenysége maximuma közel egybeesik a napfény spektrumának maximumával, más szóval, szemünk arra a színre a legérzékenyebb, amely szín a legnagyobb intenzitással van képviselve a Nap spektrumában.

Wien második törvénye.

Kevésbé ismert Wien második törvénye, amely a maximális intenzitásérték hőmérséklet-függését adja meg. Eszerint a maximális intenzitás értéke a hőmérséklet ötödik hatványával arányos, vagyis:

$$I_{\max} = K T^5$$

Stefan-Boltzmann törvény

A T abszolút hőmérsékletű test felületi teljesítménysűrűsége, vagyis a test felületegysége által egységnyi idő alatt kisugárzott energia, a test abszolút hőmérsékletének negyedik hatványával arányos. Az abszolút fekete testre a következő kifejezés adja meg ennek értékét:

$$E = \alpha T^4$$

Az α számértéke $5.75 \cdot 10^{-8} \text{ joule}/(\text{m}^2 \text{ sec } K^4)$. E kisugárzott teljesítmény a teljes spektrumból származik, vagyis az (12) ábrán az egyes spektrumgörbék alatti teljes területtel tudjuk szemléltetni.

Az α állandó a Planck féle sugárzási törvény alapján más természeti állandókkal kifejezhető. Nem illik ugyan ezt megtanulni, de azért leírjuk:

$$\alpha = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3}$$

Ebben c a fénysebesség, h a Planck állandó, k a Boltzmann állandó, amelyet R/N alakban állítunk elő, R jelöli az univerzális gázállandót, s végül N a Loschmidt féle szám.

Valamely test hőmérsékleti sugárzása kapcsán jelentkező energiavesztésében azt is figyelembe kell vennünk, hogy nem csak a test sugároz a környezet felé, de a T_k hőmérsékletű környezet is a vizsgált test felé. Így a környezet felé leadott sugárzási teljesítménysűrűség a következő:

$$E = \alpha(T^4 - T_k^4)$$

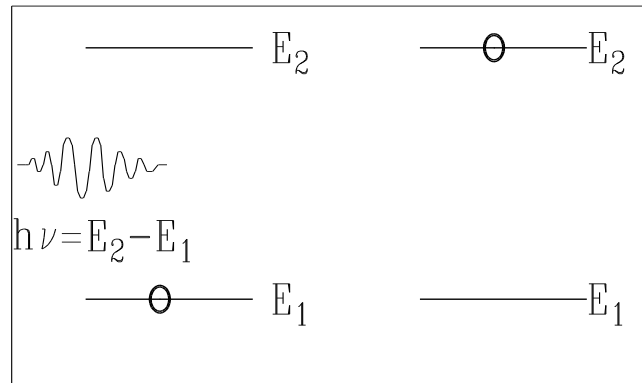
6.4. A LASER

A Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation szavak kezdőbetűiből LASER szó rakható össze. Ez utóbbi tehát egy (acronym) mozaikszó, de ettől talán fontosabb az eredeti szavak jelentése: Fény Erősítés Stimulált(*) Sugárzás Kibocsátással. ((*) nem magától végbemenő, valamilyen külső hatással kiváltott, indukált)

A LASER (lézer) működésének megértéséhez egyes atomfizikai alapfogalmak, alapfolyamatok ismeretére is szükségünk van. Elsőként ezeket tisztázzuk.

Az atomi elektronburok lehetséges (un. megengedett) állapotait diszkrét energiaértékek jellemzik. Az elektronburok lehetséges E_1, E_2, E_3, \dots stb, energiaértékei közül az ábrán pusztán két energianívót (energiaszintet) jelöltünk, itt a legalacsonyabbat az 1-es index jelöli.

Alapállapotú atom }
 + foton } Gerjesztett atom



{ Gerjesztés, vagy }
 { foton abszorpció }

Ha egy foton egy alapállapotban (E_1) levő atomnak ütközik, és frekvenciájából adódó energiája megegyezik az atomi elektronburok egy megengedett magasabb energiájú állapotba juttatásához, akkor a foton (bizonyos valószínűséggel) elnyelődik, és az elektronburok a magasabb energiájú állapotba jut. Ezt egy egyszerűsített, és valójában hibás mese során úgy szoktuk mondani, és ábrázolni, hogy a legkülső elektron egy magasabb energiájú energiájú szintre ugrik. Az ábra e folyamat kiinduló, és végállapotát mutatja. A fotont egy hullámcsomaggal szemléltetjük.

Ezt az egyetlen folyamatot két néven is szoktuk emlegetni, attól függően, hogy a foton, és atom közül, az adott vizsgálat során melyik a fontosabb számunkra. Ha a foton sorsa érdekel minket, akkor azt mondjuk, hogy ez egy fotonabszorpció. Ha olyan közegen eresztünk át fénynyalábot amely (zömmel) alapállapotú atomokat tartalmaz, akkor ebben a közegben a fény $h\nu = E_2 - E_1$ feltételnek megfelelő összetevője (-színű komponense-) elnyelődik. Ez a folyamat vezet egyébként a vonalas spektrumok abszorpciós változatához.

Ha az atom sorsát viseljük szívünkön, akkor ugyanerre a folyamatra a gerjesztés szót használjuk, sőt még azzal is bővíthetjük a fizikai szótárunkat, hogy ez az *optikai* gerjesztés. Ugyanezen gerjesztett végállapothoz ugyanis más folyamatok során is eljuthatunk, pl. (atom - atom), (atom - elektron) ütközések folytán is, sőt még egy különösnek tűnő folyamatot is meg említenünk, nevezetesen a gerjesztett állapot átadását. Ennek során egy gerjesztett állapotban levő atom visszatér alacsonyabb energiájú állapotába, miközben a vele érintkezésbe lépő alapállapotú atom gerjesztett állapotba jut. (ezt nevezzük a szilárdtest fizikában excitonnak)

A gerjesztett atom, hosszabb -rövidebb idő elteltével magától visszatér az alacsonyabb energiájú állapotába, s az energiátöbbletet egy foton viszi el. (persze itt is több un. bomlási csatorna lehet, de itt csak a fotonemissziót vizsgáljuk) Az előbbi ábra itt is érvényes, csupán visszafelé kell olvasnunk. azaz a kezdő, és a végállapotot kell felcserélnünk. A folyamatot spontán foton emisszióknak, vagy a gerjesztett állapot sugárzásos bomlásának nevezhetjük. Ilyenkor az emittált (kibocsátott) foton paraméterei megjósolhatatlanok. Ezekre a paraméterekre kissé kopott eleganciával azt szoktuk mondani, hogy valószínűségi változók. Vagyis nem tudjuk megmondani, hogy az atom mikor, milyen irányban, milyen polarizációs állapotú fotont ereget ki magából. Egyébként emiatt nem jelentkezik interferencia különböző fényforrásokból származó fénysugarak között.

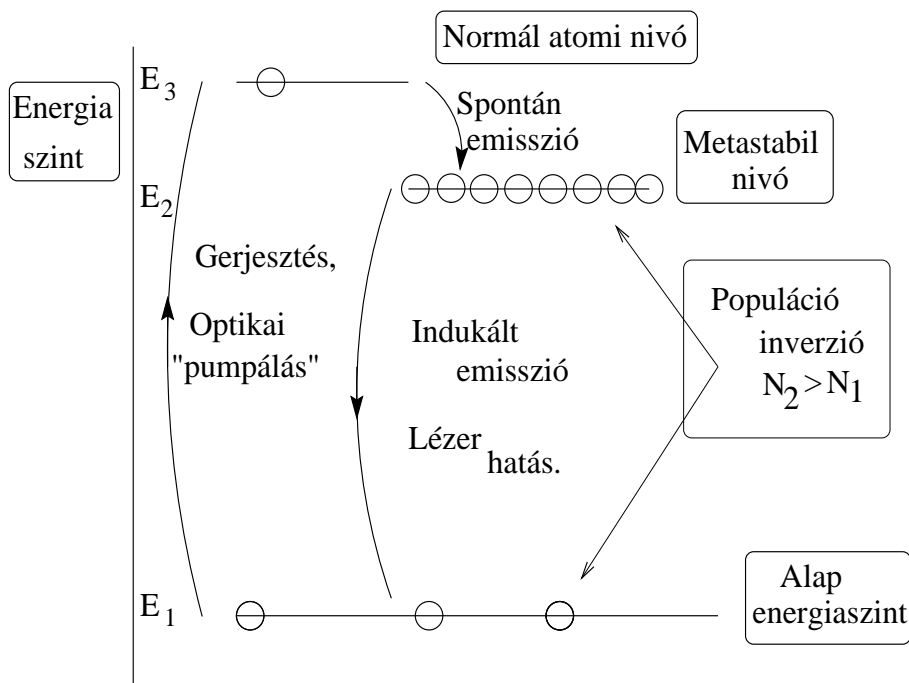
Egy gerjesztett atomi nívónak (nívó itt energiaszintet jelent) igen fontos jellemzője az átlagos élettartama. A gerjesztett állapotból hosszabb, rövidebb idő elteltével az atom magától alacsonyabb állapotba kerül pl. a spontán fotoemisszió folytán. Sok (azonosan) gerjesztett állapotú atom megfigyelése alapján a gerjesztett állapotban eltöltött időtartamok átlagát értjük a gerjesztett állapot élettartama alatt. A nívók élettartama alapján két típust különböztetünk meg, a normál és az un. metastabil nívókat. Ezeket átlagos élettartamuk különböztetik meg, a metastabil nívók élettartama nagyságrendekkel hosszabb. A gerjesztett állapot élettartama, és az élettartam bizonytalanságát jellemző $\Delta\tau$ közel azonos értékűek, így a továbbiakban e két mennyiséget egyenlőnek fogjuk tekinteni. A határozatlansági reláció alkalmazása e kétfajta atomi nívóra érdekes következtetésekhez vezet. Az energiaszint határozatlanságát jellemző ΔE és a gerjesztett nívó élettartama között a következő összefüggés áll fenn: $\Delta\tau \Delta E \geq \hbar/2$. Ebből az következik, hogy a rövidebb élettartamú ($\Delta\tau$ kicsi) normál atomi nívók energia határozatlansága nagyságrendekkel nagyobb kell hogy legyen mint a hosszabb élettartamú metastabil nívóké. Röviden: a metastabil energianívók energiája sokkal élesebben meghatározott, mint a normál atomi nívóké.

A LASER működés szempontjából lényeges atomfizikai folyamat a stimulált (indukált) fotonemisszió. Ha a gerjesztett állapotban levő atomhoz egy olyan foton érkezik, amelynek frekvenciája megfelel a gerjesztett és az alacsonyabb nívók energiakülönbségének, (azaz a $h\nu = E_2 - E_1$ frekvenciafeltétel teljesül) akkor bekövetkezik az indukált fotonemisszió, amikor az atom visszatér az alacsonyabb energiaszintű állapotába, s a gerjesztett állapot többletenergiáját egy kibocsátott foton viszi el. Ekkor tehát két foton hagyja el a küzdőteret, az eredeti beérkező foton, s az emittált újabb foton. Meg kell szoknunk az elemi részecskék körében általános megkülönböztethetlenségi elvet, amely következtében nem tudjuk megmondani, hogy melyik foton az eredeti, és melyik a frissen született. A lézersugár egyik fontos tulajdonsága az (időbeli és térbeli) koherencia. Ennek eredete itt érhető tetten, hiszen e két foton egymás másolatainak tekinthető, polarizációs állapotuk, fázisuk, stb. megegyezik. Vegyük észre, hogy itt fényerősítés történt, e folyamatba egy foton ment be kettő jött ki.

Ha valamely közegben a frekvenciafeltételnek megfelelő színű fény halad akkor két eset lehetséges. Ha az atomok többsége alapállapotban van, akkor domináns folyamat az abszorpció lesz, a fény elnyelődik, ha viszont a gerjesztett állapotú atomok vannak többen, akkor fényerősítési folyamat a nyerő. Ez utóbbi eset szükséges a lézer működéséhez.

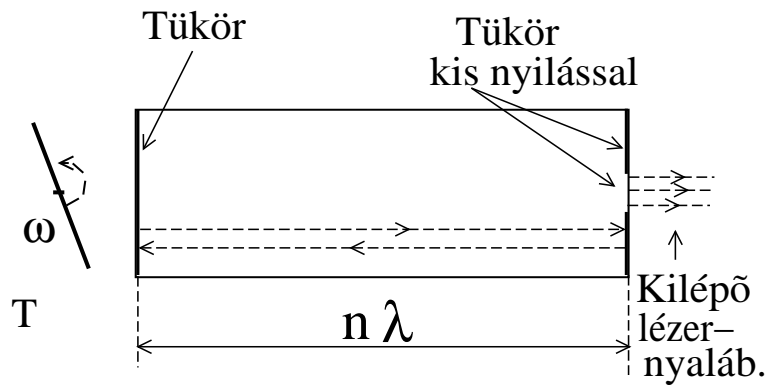
Klasszikus statisztikus fizikai ismereteink szerint termodinamikai egyensúlyban levő rendszerben az egyre magasabb energiájú állapotokban egyre kevesebb részecske van. Ha N_1 jelenti az E_1 állapotban levő részecskék -atomok, molekulák- számát (úgy is mondhatjuk, hogy az E_1 szint populációja - benépesedése - N_1) és N_2 jelen, akkor $N_1 > N_2$ feltéve, hogy $E_1 < E_2$. Ebből az következik, hogy termikus egyensúlyban levő közegben csak abszorpciót remélhetünk. Ahhoz, hogy a közegben fényerősítés következzen be, el kell érniünk, hogy több atom legyen a magasabb energiájú (gerjesztett) állapotban, mint az alacsonyabb energiájú állapotban, vagyis meg kell fordítanunk az egyes energiaszintek benépesedését. Ezt a (nemegyensúlyi) állapotot amikor több atom van a magasabb energiájú gerjesztett állapotban mint az alacsonyabban nevezük populáció inverzióknak : $N_1 < N_2$ ($E_1 < E_2$)

Ezen állapot megvalósítása speciális energianívórendszer feltételez. Egy, a lézerműködéshez szükséges egyszerű energiszintrendszer a következő:



A lézer működésének atomfizikai oldala három részfolyamatból áll. E részfolyamatok egyes lézertípusoknál időben is elkülönülve játszódnak le, -ezek az impulzusüzemű lézerek-, más, az un. folyamatos üzemű lézerekénél, e részfolyamatok egymással párhuzamosan, folyamatosan zajlanak.

Az első folyamat során történik a gerjesztés. Ennek során az E_1 energiájú alapállapotban levő atomok (molekulák) egy részét E_3 energiájú állapotba visszük. Ezen folyamat során történik a lézer működését fedező energiabetáplálás. Igen lényeges jellemzője a lézereknek a hatásfok, amely azt jellemzi, hogy a betáplált energia (teljesítmény) hányad



13. ábra. Gázlézer cső elvi rajza.

részét kapjuk vissza a lézerműködés során keletkező koherens sugárzás energiájának formájában. Az energiabevitelnek számos formáját alkalmazzák pl: optikai, ütközéses, kémiai energiabevitel.

A gerjesztés optikai változatánál alkalmazzuk a fényképezőgépeknél is használt vaku nagyobbra nőtt testvérét. Ritkított gázt tartalmazó üvegcsőben nagyfeszültségű kisülést hozunk létre. E villanás fotonjai azok, amelyek az $E1 \rightarrow E3$ gerjesztést okozzák. Itt tehát optikai módon pumpálunk energiát a lézerbe, ezért is nevezik e szakaszt optikai pumpálásnak.

Más lézereknél folyamatosan fönntartott elektromos kisülés szolgáltatja a lézer energiáját. Fénycsőekben, reklámfeliratoknál alkalmazott "neon" -csővekben elektromos térrel gyorsított elektronok ütközéses ionizációval termelik az áram fönntmaradásához szükséges töltéshordozókat (elektron- ion+ párokat). A széles körben alkalmazott folytonos üzemmódú He-Ne (Hélium, Neon) vörösfényű lézerben az ütközések egy része a lézerműködés energiáját szolgáltatja. Fontos megemlítenünk, hogy a He-Ne lézernél az atomi energiaszintrendszer sokkal bonyolultabb az ábra sémájánál. E lézertípusnál elektronütközés gerjeszti a Hélium atomot. A gerjesztett He atom alapállapotú Ne atommal ütközve átadja gerjesztett állapotát ez utóbbinak. Ez egy rezonanciaszerű jelenség, ui. a Neonnak van a He-mal közel azonos energiájú gerjesztett állapota. A gerjesztett Ne indukált emissziója vezet a lézertér sugárzásához.

Az $E3$ -as normál atomi szintről az atomok rövid idő alatt -spontán emisszióval- az alacsonyabb energiájú metastabil $E2$ energiaszintre jutnak. Ezen átmenet során keletkező sugárzást -mint nem kívánatos szemetet- kiszűrjük a kilépő lézertér sugárzásból.

Az $E2$ metastabil energianívó hosszú élettartamú, így ezen állapotú atomok száma megnövekszik.

A LÉZER működésének egy egyszerűsített gyarázatát a () ábra segítségével adjuk meg.

Mindkét végén sima, tükröző felülettel lezárt üvegcsőben megfelelő atomfizikai tulajdon-

ságú gáztöltet van. Valamilyen módon már létrehoztuk -illetve folyamatosan fönntartjuk- a populáció-inverziót, vagyis azt az állapotot, amelyben több atom van gerjesztett, metastabil állapotban, mint az alacsonyabb energiájú alapállapotban. Ezt pl. elektromos gáz- isülés ütközési folyamataival, vagy egy külső villanófény okozta optikai gerjesztéssel hozhatjuk létre. Ezt itt és most nem tárgyaljuk, az ezzel kapcsolatos szerkezeti elemeket a rajzon nem jelöljük. Tudjuk, hogy ha gerjesztett atommal megfelelő frekvenciájú foton lép kölcsönhatásba, akkor az indukált emisszió során fényerősítés történik. Ennek a valószínűsége elég csekély, vagy más megfogalmazással élve, a fény által megtett egységnyi úthosszon bekövetkező fényerősítés nagyon kevés ahhoz, hogy a lézer csővének egyszeri befutásával megfelelő lézerintenzitást kapjunk. Ezért a lézercső végeit tükröző felülettel zárjuk le, s a végekről visszavert fény többször oda, vissza befutva az optikailag aktív közeget már kellő fényerősítést, illetve lézerintenzitást érhetünk el. Az oda és visszafutó fénysugarak akkor fogják erősíteni egymást, ha megfelelő fázisban találkoznak, ezért szükséges, hogy a tükröző felületek közötti távolság a hullámhossz egész számú többszöröse legyen. A lézersugár egyik megkülönböztető sajátága az élesen meghatározott hullámhossza. Ez azt jelenti, hogy amíg a normál atomi nívók átmeneteinél kibocsátott vonalak intenzitás eloszlás szélességét jellemző $\Delta\lambda$.. nagyságrendbe esik, addig ugyanez lézerek esetében ... Fontos megjegyeznünk, hogy ehhez a metastabil nívók eleve élesebb energiameghatározottságán túl, a cső mechanikai hosszából adódó feltételek vezetnek.

Ha a cső hossza pl. hőmérsékletnövekedés miatt megváltozik, akkor a lézercső működése bizonytalanra válhat. A tükröző felületet rendszerint a csövön kívülre teszik, gyakran elektrostrikiós anyagra (kristályra). Az elektrostrikió jelenségét - amelynek során a kristálytani tengelyekhez viszonyítva meghatározott irányban alkalmazott elektromos mező hatására megváltozik a kristály mérete- gyakran a piezoelektromos jelenség (a kristályon alkalmazott deformáció, nyomás, elektromos feszültség megjelenéséhez vezet) inverzeként emlegetik. Ez azonban nem teljesen igaz. Ezen alkalmazásban azonban csupán az a lényeg, hogy a tükröző bevonat pozícióját elektromos feszültséggel módosítani, stabilizálni tudjuk.

Ha az egyik tükröt elhagyjuk, és egy (a rajzon T-vel jelölt) külső forgó, vagy csupán elfordítható tükörrel helyettesítjük, akkor egyszeri, vagy periódikusan működő impulzuslézert kapunk. Eforduló tükör esetén a fényerősítéshez szükséges oda - visszaverődés feltételei csak (tervezhetően) rövid ideig állnak fön. Ilyenkor rövid ideig tartó, de nagy teljesítményű lézerimpulzust, vagy impulzussorozatot kapunk.

A lézernyaláb az egyik végablak tükrének kicsiny nyílásán hagyja el a csövet. Belátható, hogy a többszöri visszaverődésben, így a jelentős fényerősítésben csak a cső tengelyével párhuzamosan haladó fénysugarak részesülhetnek, vagyis a lézerekészüléket elhagyó nyaláb nagymértékben párhuzamos. A párhuzamosságot két (egymással összefüggő) adattal jellemezhetjük. Egyik adat a divergencia (azaz a nyaláb széttartásának) szöge. A másik, amely az előbbit helyettesítheti, egy képzeletbeli pontszerű fényforrásnak az a távolsága, amely távolságból, az adott nyalábméret mellett a lézerünknel mérhető széttartási szöget kapnánk.

-folyt köv-

7. A magfizika elemei

Rutherford vékony aranyfólián α részecskéket eregetett át. Az aranyfólia túloldalán az átmenő részecskék irányeloszlását vizsgálta. Az eredmény elképesztő volt, az alfa részecskék többsége irányváltozás nélkül jutott át az aranyfólián. Az alfa részecskék csak igen kis hányadánál talált (az eredeti haladási iránytól mért) nagyszögű eltérést. A kísérlet végkövetkeztetése az, hogy a fóliát alkotó atomok tömege zömmel egy igen kis térrészre koncentrálódik, a többi rész a majdnem semmivel van kitöltve, azaz alfa részecskék tömegéhez viszonyítva igen kis tömegű valamik töltik ki a tér legnagyobb részét. Az igen kicsiny térrészben található, és igen nagy sűrűségű részt nevezük atommagnak.

Mai tudásunk szerint az atomok, az atom burkát alkotó negatív töltésű elektronfelhőből, és a pozitív töltésű atommagból tevődnek össze. Az atomburok jellegzetes mérete az Angström nevű úrról elnevezett hosszegység, az $\text{\AA}=10^{-10}m$. A Hidrogénatom elektronburkának sugara 1.54\AA , a Széné 0.91\AA . Az atommag méretekre jellemző hosszegység a $10^{-15}m$. Az elektronburokkal, s ezek kölcsönhatásaival az atomfizika, molekulafizika, kvantumkémia (kémia), s némileg a szilárdtestfizika is foglalkozik. Az atomburok átrendeződéseihez kapcsolódó jellegzetes energiaértékek $10 - 100 \text{ eV}$ (alkalmilag +/- még egy-két nagyságrend). Az atommaggal a magfizika foglalkozik. Jellegzetes energiaértékei a MeV (10^6 eV) tartományba esnek. Szerencsére az atommag és az elektronburok nem állnak kölcsönhatásban, így teljesen elkülönülten tárgyalhatók. Kivételszerűen azonban a mag néhány bomlási folyamatánál a belső elektronhéjak is szerepet játszanak.

Amikor a háztartási fizikáról az atomi méretek tárgyalására térünk át, azt tapasztaljuk, hogy a régi fizikát újra kell cserélnünk. Atom méreteken mindennapi tapasztalataink, alapfogalmaink értéktelenné, alkalmazhatatlanná válnak. Az atomburok fizikája a kvantummechanika eszközeivel, fogalmaival tárgyalható. Nagy kérdés az, amikor újabb réteggel lejjebb megyünk, vagyis hogy az atomfizikáról a magfizikára térünk át nem kell-e újabb fizika-ruhát váltanunk. Szerencsére ugyanaz az eszközrendszer -a kvantummechanika- alkalmas a magfizika tárgyalására is, mint az atomburokéra.

Az atommag pozitív töltésű protonokból, és elektromosan semleges, más szóval neutrális részecskékből ún. neutronokból állanak. A magot alkotó protonokat, neutronokat egy közös névvel **nukleonoknak** nevezük. Az atommagban nincsenek elektronok, bár alkalmanként az atommagok elektronokat köpnek ki. Ezek az elektronok a neutron protonra, elektronra és antineutrínóra bomlása során keletkeznek.

A két magalkotó részecske tömege közel egyenlő. Egy proton tömege egy elektron tömegének kb. 1838-szorosa. Ha figyelembe vesszük, hogy általában a magok durván azonos számú protont és neutront tartalmaznak, akkor láthatjuk, hogy az elektronburok az atom tömegének kevesebb mint $1/3000$ -ed részét képviseli. Ugyanakkor az atomok a 'külvilággal' szinte kizárólag a külső elektronjaival érintkeznek. ezek felelősek a kémiáért, a testek színéért, stb.

Neutrális (semleges) atom elektronburkában az elektronok száma megegyezik a magbeli protonok számával. Kémiai tulajdonságokért a legkülső elektronok felelősek, s mivel az elektronszámot a protonok száma határozza meg, így azt, hogy milyen kémiai elemről van szó, azt az atommagban levő protonok száma határozza meg. A protonok számát

rendszámunk (Z) nevezzük. Az atommagban levő neutronok száma (N) a kémiai tulajdonságokat nem befolyásolja (tömegtől függő reakciósebességekre, illetve egyensúlyi koncentráció értékekre viszont hatással van). Ugyanazon kémiai elem (azaz rögzített rendszámú atomok) magjai különböző számú neutronot tartalmazhatnak. Az atommag rendszámának és neutronsámának összegét tömegszámunk ($A = Z + N$) nevezzük. Ugyanazon kémiai elem különböző neutronsámú -így egyúttal különböző tömegszámú- változatait az adott kémiai elem izotópjainak nevezzük. Ezen izotópok, habár kémiai tulajdonságaikban megegyeznek, magfizikai tulajdonságaikban alapvetően különbözőek.

7.1. A magerők tulajdonságai

Ha kiszámoljuk a mag méretén belül elhelyezkedő protonok között föllépő elektrosztatikus taszítóerőt, megdöbbenő eredményre jutunk. Ezek az erők makroszkópikus (kg tömegű) testeken is tekintélyes gyorsulás hoznának létre. S hogy az atommag alkatrészei nem repülnek szét, annak köszönhető, hogy közöttük igen erős vonzó típusú erők is fellépnek. Ezek a magerők, amelyek legalapvetőbb tulajdonságai a következők:

töltésfüggetlenek, ami azt jelenti, hogy proton-proton, proton-neutron, neutron-neutron kölcsönhatásokban egyformán jelentkeznek.

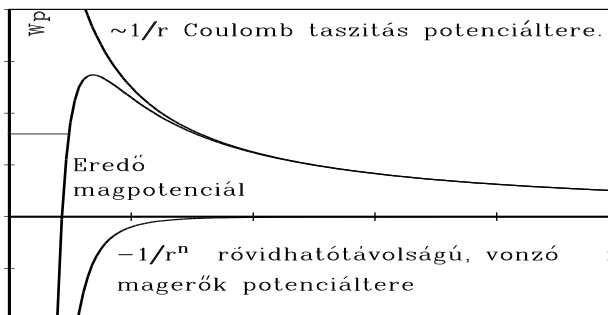
rövid hatótávolságú. A magerők sajnos sokkal bonyolultabbak, mint az eddig megismert egyszerű összefüggésekkel leírható Coulomb, vagy a gravitációs erők. Egyszerű, zárt formulát nem is tudunk megadni, azt azonban tudjuk, hogy ezek az erők a nukleonok közötti távolság növekedésével sokkal rohamosabban tartanak 0-hoz, mint az említett klasszikus erőkre jellemző $1/r^2$ -es 0-hoz tartás.

telítésjellegűek, amely azt jelent, hogy (a nem túl alacsony tömegszámú magoknál), az újabb nukleon már nem lép kölcsönhatásba a mag összes többi nukleonjával, a kölcsönhatás csupán a közvetlenül szomszédos nukleonokra korlátozódik. Ez valójában közvetlen folyamánya a rövid hatótávolságnak, de gyakran mint önálló tulajdonságot említik.

A magerők eredő potenciáljának jellegét bemutató ábra két erőhatás potenciálját tartalmazza. Ezek egyike a Coulomb taszítást. Ez csak a pozitív töltésű nukleonokra vonatkozik. Ha a nagy r értékek felől egy W_0 kezdeti mozgási energiájú töltött részecske közelít az atommag felé, akkor a Coulomb taszítás csak olyan megközelítést tesz lehetővé, amely a kezdeti energia és a taszító erők ellen végzendő munka egyenlőségéből adódik. Húzzunk egy, az r tengellyel párhuzamos egyenest a tengelytől W_0 magasságban, nézzük meg milyen r sugárnál metszi az eredő magpotenciál görbét. E metszéspont jelöli ki a legszorosabb megközelítés távolságát. E geometriai receptnek fizikai megfelelője a következő: Konzervatív mezőben haladó részecske mozgási és helyzeti energiájának összege a mozgás során nem változik. A magtól távol a mag terétől származó potenciális energia nulla, az összenergia tehát a kezdeti W_0 mozgási energia. Legközelebb akkor van a részecske a maghoz, amikor egy pillanatra megáll. Ekkor mozgási energiája eltűnik, az összenergiát a potenciális energia képviseli.

A Coulomb taszítás neutronokra nem működik, neutronokra nézve az atommag potenciáltere úgy viselkedik mint egy golflabda számára a lyuk. Ebből adódik, hogy amíg töltött részecskéket csak úgy tudunk egy magba bevinni, hogy olyan energiákra gyorsítjuk, amely

Atommag potenciáltere



14. ábra. A magerők a távolság viszonylag magas hatványa szerint tartanak nullához, vagyis rövid hatótávolságú erők.

energia eléri, vagy meghaladja az eredő potenciál maximumából adódó energiaértéket (*), addig neutronoknál nem kell semmiféle gyorsítást alkalmaznunk (sőt) magreakciók létrehozásához.

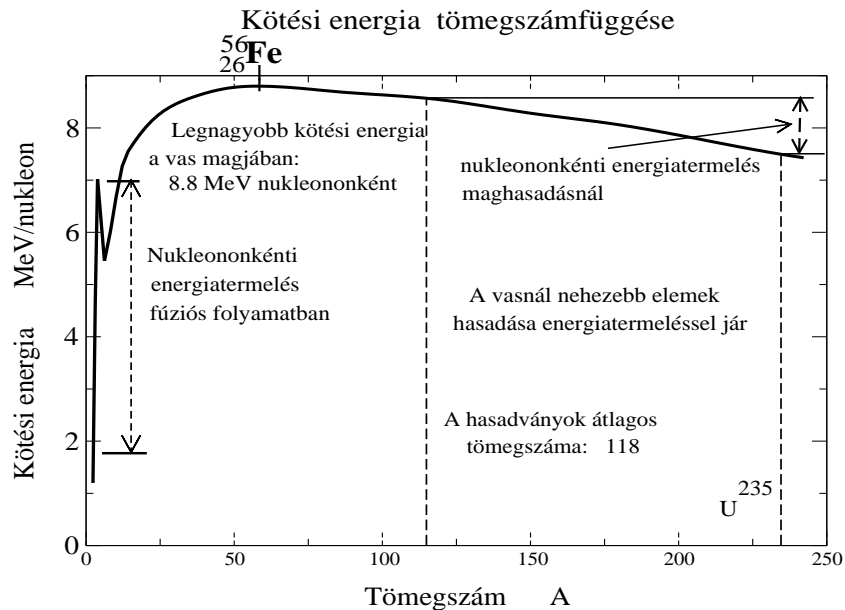
(*) Klasszikus fizikai kép szerint. A kvantummechanikában meglévő alagúteffektus miatt már alacsonyabb energiákon is bejuthatnak részecskék a magba.

7.2. Kötési energia, és a tömeghiány

Ha egy atommagot szét akarunk szedni nukleonjaira, akkor munkát kell végeznünk a vonzó magerők ellenében. Azt az energiát, amelyet be kell fektetnünk ahhoz, hogy nukleonjaira szétszedjünk egy atommagot, az atommag kötési energiájának nevezzük. Kötött állapotban az atommag energiája tehát kisebb, mint a megfelelő számú szabad (egymással már kölcsönhatásban nem álló) neutron, proron „alkatrészek” energiája. Ezért - az atommag szempontjából - a kötési energiát negatívnak kell tekintenünk.

A folyamatot fordított irányban is vizsgálhatjuk. Ha alkotóelemeiből rakjuk össze az atommagot, akkor e folyamat során energiát bocsát ki (pl. gamma sugárzás formájában) az atommag.

Igen fontos mennyiség az egy nukleonra eső (átlagos) kötési energia. Ennek tömegszámfüggése lényeges információkat ad az atommag felépítésében szerepet játszó effektusokról. Átlagosan nukleonként kb. 8MeV körüli energiaérték szükséges az atommagok felbontásához. A kötési energia tömegszámfüggését leíró görbe menetéből olvashatók ki a fúziós, fission (hasadási) reakciók energiatermelési adatai, stb.



Einstein ismert összefüggése, amely a tömeg - energia ekvivalenciát fogalmazza meg $E = m c^2$ azt mondja, hogy ha munkát végzünk, energiát közlünk egy rendszerrel, akkor a közölt energiával arányos tömegnövekedést is létrehoztunk. Ez azt jelenti, hogy a független nukleonok tömegeinek összege nagyobb, mint az ugyanazon nukleonokból álló atommag tömege.

$$m({}_Z^A X) < N {}_0^1 m_n + Z {}_1^1 m_p \quad m({}_Z^A X) = N {}_0^1 m_n + Z {}_1^1 m_p - \Delta m$$

Az elmondottak szerint a tömeghiányért az atommag teljes kötési energiája felelős, azaz :

$$E_{kot} = \Delta m c^2$$

7.3. A radioaktivitás

A bomlástörvény

Az instabil magok előbb, vagy utóbb elbomlanak. Az egyedi atommagokról nem tudjuk megmondani, hogy a bomlása mikor következik be, mondjuk egy tizedmásodperc múlva, vagy esetleg még a következő milliárd évet is átvészeli bomlás nélkül. Tudnunk kell azt is, hogy a bomlást hagyományos mechanika, kémiai, hőtani, elektromos hatásokkal nem tudjuk befolyásolni egyszerűen az eltérő energia nagyságrendek miatt. Amíg a kémiai átalakulások 1-100 eV atomonkénti enegianagyságrend környékén működnek, - 13.5 eV pl. a hidrogénatom ionizációs potenciálja - az atommagban levő nukleonok (protonok, neutronok) eltávolításához több, átlagosan 7-8, MeV energia szükséges. Az egyedi atommagok bomlásának megjósolhatatlansága ellenére, ha elég sok atommag van a vizsgált mintánkban, akkor már meglehetősen éles kijelentések tehetők a bomlásra képes magok

számának változására. Tudomásul kell vennünk azonban, hogy mind a bomlás, mind pedig a bomlás során kilépő sugárzások detektálása valószínűségi folyamatokon alapul, így a radioaktív mérési eredményeket mindig statisztikus ingadozás jellemzi.

A sugárzó izotópokat tartalmazó anyagdarabot sugárforrásnak, mintának, de (radioaktív) preparátumnak is szokás nevezni.

Az N darab bomlásra képes (radioaktív) magot tartalmazó mintában a Δt időtartam alatt bekövetkező bomlások száma arányos a jelen levő - még el nem bomlott- bomlásra képes magok N számával, a figyelembe vett Δt időtartammal és egy, az illető izotópra (azaz az adott rendszámú, és neutronszámú atommagra) jellemző λ bomlási állandóval. A bomlások száma egyúttal a bomlásra képes atomok darabszámának csökkenését is jelenti: $\Delta N = -\lambda N \Delta t$. Ez vezet el a következő differenciálegyenlethez:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \quad (30)$$

Az egyenlet átrendezése a bomlási állandóra egy szemléletes értelmezést tesz lehetővé: $(dN/N)/dt$: a bomlásra képes magok hányad része bomlik el időegység alatt.

Ha kezdetben N_0 számú radioaktív mag volt a mintában, a fenti differenciálegyenlet megoldása az ún. radioaktív bomlástörvényt adja, melynek alakja : $N = N_0 e^{-\lambda t}$. A bomlásra képes izotópok száma tehát az idővel exponenciálisan csökken.

Mivel minden egyes bomlási esemény a bomlás típusától függő részecske kibocsátásával jár, a minta sugárzási (radio-) **aktivitása**, a benne másodpercenként lejátszódó bomlások számával jellemezhető. A (30) differenciálegyenlet alapján a minta A aktivitása : $A = \lambda N$. Egysége a **Bq** rövidítésű Becquerel amely az aktivitást **bomlás/sec** egységekben adja meg. Bár hivatalosan nem alkalmazható, mégis eléggé széles körben használatos még manapság is az aktivitás **Ci** azaz a **Curie** egysége. 1 **Ci** az aktivitása 1 g rádiumnak, amelyben $3.7 \cdot 10^{10}$ bomlás játszódik le másodpercenként. A bomlásra, és a minta aktivitására vonatkozó kijelentéseink a fenti formájukban csak a legegyszerűbb esetre érvényesek, amikor is a vizsgált radioaktív magok nem valamilyen más izotóp bomlása során keletkeznek, valamint a bomlás során keletkező új atommag -az ún. leányelem-, tovább már nem bomlik, így az nem ad járulékos aktivitást a minta eredeti aktivitásához.

Az izotópok bomlási sebességét a bomlási állandó helyett egy sokkal szemléletesebb adattal, az ún. felezési idővel szokás jellemezni. Ez, az az időtartam, amely alatt a bomlásra képes atommagok száma az eredeti érték felére csökken. A λ bomlási állandó, és a $T_{1/2}$ felezési idő kapcsolata egyszerűen felírható az előbbi definíció alapján:

$$N_0/2 = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}} \quad \Rightarrow \quad T_{1/2} = \ln(2)/\lambda$$

A különböző izotópok felezési ideje igen széles skálán mozog, a másodperc tötrészeitől milliárd évekig. Az urán-238 izotóp (^{238}U) felezési ideje 4.5 milliárd év, a neon-12- izotópé 0.012 sec. A reaktorbalesetek, kapcsán kiszabaduló két elhíresült izotóp a jód-131 felezési ideje 8.05 nap, a cézium-137 izotópé 30 év. A régészeti kormeghatározásban fontos szén-14 izotóp 5568 év felezési idejű.

A besugárzott objektumban a radioaktív sugarak egy része elnyelődik, s ennek hatására az objektumban bizonyos változások -rendszerint károsodások- halmozódnak fel. E károsodá-

sok a teljes elnyelt (halmozott) sugáradaggal, az un. dózissal arányosak. A dózis SI egységének neve gray, a jele Gy. 1 gray az elnyelt dózis akkor, ha a besugárzott test 1 kg-jában 1 Joule sugárzási energia nyelődik el. Korábban használatos egysége a CGS (Cm-Gramm- Secundum) alapegységeken nyugvó rad (radiation absorbed dose) nevű egység volt. $100 \text{ rad} = 1 \text{ Gy}$.

Az elnyelt sugárdózisnak időegységre jutó részét dózisteljesítménynek nevezzük.

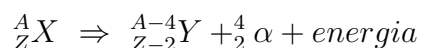
A fenti fizikai dózisek nem képesek jellemezni az élő anyagon áthaladó ionizáló sugárzás biológiai károsítását. Kiderült, hogy a biológiai károsodás nagymértékben különbözhet attól függően, hogy milyen típusú sugárzás érte a szervezetet. A különböző sugárzások biológiai hatásának összevethetősége céljából meghatározták a különböző sugárzások dózisegyenértékeit. E biológiai hatást egy un QF faktorialadják amellyel a fizikai dózist szorozva kapjuk.

7.4. Rádióaktív bomlástípusok

Ha más nem is, de a természetes rádióaktív bomlástípusok, illetve az ezen bomlások során keletkezett sugárzástípusok nevei közismertek: α , β , γ sugárzás. Már csupán ezen elnevezésekből is sokmindent ki tudunk olvasni. Először is a felfedezés idejében fönnálló ismerethiányra utal az a tény, hogy a névválasztás egyszerűen egy sorrendnek felel meg, hiszen ezek a görög ABC első betűi, így akár lehettek volna 1, 2, 3 -as sugárzás is. Föltehető az is, hogy e sorrend egyúttal a kimutathatóság, detektálhatóság sorrendjét tükrözi, amely persze a környezettel való kölcsönhatás intenzitásából -ma már tudjuk, hogy a különböző ionizálóképességből- adódik. Az ismeretek bővülése miatt a később fölfedezett sugárzás és bomlástípusok már nevükön neveztetnek, pl neutronsugárzás, spontán bomlás, K befogás stb. így már nem várhatjuk egy δ nevű sugárzás megjelenését.

Az α bomlás.

Az α bomlás során az atommag egy olyan részecskét bocsát ki magából amely két protonból, és két neutronból áll. Ez az un. α részecske egy kétszeresen ionizált Hélium ${}^4_2\text{He}$ atom, azaz egy puczér Hélium atommag. Ennek megfelelően az α bomlás során keletkezett leányelem rendszáma kettővel tömegszáma négyvel kisebb az eredeti (anya) elemre jellemző értékeknél.



Az α részecske összetett volta ellenére, egyetlen zárt kompakt részecskeként viselkedik már az atommagon belül is. Ahogyan az atomok elektronburkában meghatározott számú elektron esetén igen stabil, lezárt héjak alakulnak ki -gondoljunk a nemesgázokra-, ugyanúgy az atommagban un. mágikus számú proton, illetve neutron esetén igen stabil, kiemelkedő kötési energiájú konfigurációkat kapunk. Ezek egyik illusztris képviselője az alfa részecske.

A bomlási energia nagy részét az alfa részecske viszi magával, s ez mint a részecske mozgási energiája lesz jellemző a kibocsátott részecskére. Kétszeres elemi töltése folytán,

miközben áthalad a közegen, főleg az útjába kerülő atomok elektronjaival kerül kölcsönhatásba, azaz az útjába eső atomokat ionizálja. Csak igen kis hányaduk kerül kölcsönhatásba az anyag atommagjaival. Ezek az eredeti nyaláb irányához viszonyítva nagy szög alatt szóródnak ki a nyalábból, -ez a Rutherford szórás jelensége- az α részecskék döntő többsége azonban változtalan irányban folytatja a repülését. Az α részecske minden ionizációs esemény kapcsán az illető atomra / molekulára jellemző ionizációs potenciálnak megfelelő energiát veszít, végül energiája nem fog különbözni a környezetében levő atomok hőmozgására jellemző energiától. Ekkor már egy közönséges Héliumatomról beszélhetünk csupán. Az alfa részecske pályája mentén ott maradt egy ionizált cső, amelyet a meghatározott atomok pozitív ionjai, és a lecibált elektronok alkotnak. Ezek összetöltése arányos az α részecske eredeti (mozgási) energiájával. Ezek kigyűjtésével, és az így kapott elektromos impulzus területének (begyűjtött összetöltés) analizálásával az alfa részecske eredeti energiája megadható.

Más eszközökben, nevezetesen ködkamrában ez az ionizált csatorna kondenzációs magvakat jelent a túltelített gőzök számára, ezek mentén köd csapódik ki, az alfa részecske pályája láthatóvá válik. Ennek hossza arányos a részecske eredeti energiájával. Ez levegőben jellemzően néhány centiméter.

Kristályos, közegekben, szilárdtestekben az α részecskék nyomvonala mentén összeomlik a kristályszerkezet. Mindenféle savakkal, lúgokkal kezelve ezek a rácshibák kitágíthatók, mikroszkóppal a lyukak gyakorisága (felületegységre jutó darabszámuk), stb. vizsgálható. Az erre a célra kitenyészített eszközöket szilárdtest nyomdetektoroknak nevezik.

Maga az α sugárzás nem különösebben veszélyes, már a bőrünk külső rétege elnyeli. Annál veszélyesebbek a tüdőbe lerakódó azon porszemek, amelyek α aktív izotópot kötöttek meg. Idővel a nagy ionizálóképességű sugárzás jelentősen megnöveli a tüdőrák esélyét.

Nagyobb méretű α sugárzó anyagnak csak a felületéről tudnak az emittált részecskék kilépni, a mélyebb rétegekben keletkezett α részecskék, már magában a sugárzó közegben elnyelődnek. A jelenséget önabszorpciónak nevezzük, s ez jelenség az ún. β sugárzás kapcsán is megjelenik.

Az igen nagy tömegszámú izotópok egy része hajlamos a *S*pontán *F*isszióra (*SF* külső hatás nélkül bekövetkező hasadás), amely folyamat során az atommag magától, két kisebb tömegszámú izotópra esik szét. Az ekkor keletkező nagyenergiájú töredékmagok viselkedése sokban hasonlít az alfa részecskék viselkedésére (nagy töltés és nagy tömeg jellemzi őket). Az alfa részecskékre, valamint ezen töredékmagokra is a nagy ionizálóképesség, a rövid hatótávolság, azaz a kis áthatolóképesség jellemző.

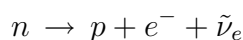
A β sugárzás

Eredetileg az atommagból kilépő elektronsugárzás viselte a β sugárzás nevet. Mára már a β bomlás gyűjtőfogalom lett, azaz több bomlás és az azt kísérő sugárzás tartozik ebbe a csoportba.

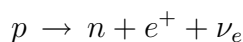
A természetben megfigyelhető összes sugárzás közül ez okozta a legtöbb meglepetést és fejtörést. Először is az atommagban nincsenek elektronok, ezt egyszerű igazolni. (a

határozatlansági relációból adódóan, a mag méretére lokalizált elektron energiája túl nagy lenne). Az α , s a γ sugárzás vonalas energiaspektrummal jellemezhető, azaz az adott izotóp adott bomlási folyamata mindig ugyanazon energiájú részecske emisszióját eredményezi. A kibocsátott β részecskéket azonban folytonos energia spektrum jellemzi, az élesen meghatározott bomlási energia ellenére. Látszólag nem teljesül az energiamegmaradás elve. E rejtélyek feloldását a következő magfizikai folyamatok adják.

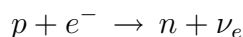
Neutron többlettel rendelkező magok elektron emisszióval (kibocsátással) kerülhetnek közelebb a stabilitási görbéhez.



Pozitron emisszió



Elektronbefogás



Az első folyamat a klasszikus β bomlás. Láthatjuk, hogy a magbéli neutron három részecskére esik szét, ezek egyike az elektron amely tehát a bomlás pillanatában keletkezik. Attól függően, hogy e három bomlástermék milyen szög alatt távozik a tett színhelyéről, más, más energiát cipel magával.

A fenti folyamatok mindegyikében elektron- neutrínók, illetve elektron- antineutrínók is keletkeztek. Ezek a részecskék -mivel alig lépnek kölcsönhatásba az anyaggal- nehezen detektálhatók. Ugyanezen neutrínók keletkeznek a csillagokban lezajló fúziós reakciók során is. Nevük egyébként arra utal hogy elektromosan semlegesek. Hogy nyugalmi tömegük nulla-e, vagy sem az a fizika jelenleg még eldöntetlen nagy kérdése

A γ sugárzás

A γ sugárzás során a gerjesztett állapotú atommag alacsonyabb energiájú állapotba kerül, s a különbségi energiát egy γ foton viszi el, vagyis a γ sugárzás egy igen rövidhullámú, illetve nagyfrekvenciájú változata az elektromágneses hullámoknak / sugárzásnak. A korábban említett sugárzástípusoktól eltérően ez nem visz el magával töltést és egyéb alkatrészt, stb, **csupán** energiát, impulzust és perdületet. A γ sugárzás során tehát nem változik meg sem a tömegszám, sem a rendszám. E sugárzástípus gyakran kísérelő sugárzása más, részecske emisszióval járó bomlásnak, amikor is a részecske emisszió során keletkezett leányelem gerjesztett állapotban marad vissza. E gerjesztett atommagok bocsátják ki később a γ fotonokat.

Az atommag éppen úgy kvantummechanikai rendszer mint az atomi elektronburok, a γ sugárzás az elektronburok fotonemissziójának analogonja. Az elektronburok folyamataiból számos jelenség így egy az egyben az atommagra is átértelmezhető.

Az optikai spektroszkópia az atomok (elektronburka) által kibocsátott fény spektruma alapján képes azonosítani az emittáló közegben levő kémiai elemeket. Vagyis a sugárzás jellemző a kibocsátó kémiai elemek atomjaira. A γ sugárzás is vonalas spektrumú ún. karakterisztikus sugárzás, azaz a sugárzás energiája jellemző a kibocsátó *izotópra*. Ugyanazon kémiai elem különböző neutronsámú izotópjainak a atomburka, kémiája, optikai spektruma (közel) ugyanaz, de magfizikai szempontból, így a γ sugárzás szempontjából is ugyanazon kémiai elem különböző neutronsámú atommagjai teljesen eltérnek egymástól. A γ sugárzás energia spektruma alapján a kibocsátó izotópok azonosíthatók. Aktívációs analízis során a vizsgálandó mintadarab atommagjainak egy kis hányadát pl. neutronbesugárzással aktíválják - azaz neutronbefogással radioaktív izotóppá alakítják - s ez utóbbi izotópok γ sugárzásának energia spektruma azonosítja a sugárzást kibocsátó izotópokat.

Az atomi elektronburok átrendeződéséből származó fotonok energiája 10 eV nagyságrend köré esik (bár a nagy rendszámú elemek belső elektronjainak kibombázásával létrehozott foton energiák KeV nagyságrendek fölé jutnak), az atommagból származó foton nagyságrendekkel nagyobb energiája már jelentős következményekkel jár. A kibocsátott foton $h\nu/c$ impulzusa folytán -mint a puska elsütésekor visszalökött puska- az atommag is visszalökődik. Ez azzal jár, hogy az energia egy része a visszalökött mag mozgási energiájában jelentkezik, a kibocsátott foton a bomlási energiától kevesebb energiát visz magával. A γ kibocsátó atommagot megfelelő kristályszerkezetbe beépítve a visszalökött test már nem egyetlen atommag, hanem egy egész mikrokristály. Ilyen esetben közel a teljes bomlási energiát viszi magával a γ foton. A foton abszorpciója során ugyanilyen impulzusváltozási jelenségek játszódnak le, azaz a fotonelnyelés során meglökött mag mozgási energiájával csökkentett foton energia fordítható (na) az atommag gerjesztésére. A kristályrácsba való beépítés itt is megszüntetheti a γ foton energiaváltozását. Amit kapunk, az az ún. visszalökésmentes γ rezonanciaabszorpció, s ezt Mösbauer effektusnak nevezzük. Ez már pontos megfelelője az atomburokra érvényes, Bohr modellben is megfogalmazott frekvenciafeltételnek, amely szerint $h\nu_{ij} = E_i - E_j$. Vagyis csak olyan frekvenciájú foton nyelhet el, illetve bocsáthat ki a kvantummechanikai rendszer amelynek energiája a szóbanforgó rendszer két energiaszintje különbségének felel meg.

A γ foton, mint az elektromágneses sugárzás energiadagja zömmel a közeg elektromosan töltött részecskéivel lép kölcsönhatásba. Így aztán nem meglepő, hogy a közeggel való kölcsönhatás sok elektront tartalmazó nagy rendszámú elemeknél sokkal markánsabb, mint a kis rendszámúaknál.

$$\Delta I = -\sigma I \Delta x \quad \Rightarrow \quad \frac{dI}{dx} = -\sigma I$$

Meg kell említenünk a γ emisszióknak egy elektronra konvertált változatát is, amelyet legegyszerűbben fotoeffektusnak foghatunk fel. Ennek során még az atomburkon belül elnyelt γ foton energiája fedezi az atomburokhoz tartozó elektron kötési energiáját (azaz kilépési munkáját), s a többletenergia pedig a kilökött elektron mozgási energiájában jelenik meg.

Univerzális állandók. .

Fénysebesség vákuumban	$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2.99793 \cdot 10^8 \left[\frac{m}{s} \right]$
A vákuum dielektromos állandója	$\epsilon_0 = 8.8541 \cdot 10^{-12} \left[\frac{A \cdot s}{V \cdot m} \right]$
A vákuum mágneses permeabilitása	$\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7} = 1.2566 \cdot 10^{-6} \left[\frac{V \cdot s}{A \cdot m} \right]$
Az elektron nyugalmi tömege	$m_e = 9.108 \cdot 10^{-31} [kg]$
A proton nyugalmi tömege	$m_p = 1.67239 \cdot 10^{-27} [kg]$
Planck-féle állandó	$h = 6.6252 \cdot 10^{-34} \left[\frac{kg \cdot m^2}{s} \right] \text{ vagy } [Joule \cdot sec]$
Stefan-Boltzman állandó, vagy más néven a fekete test sugárzási állandója	$\alpha = 5.6687 \cdot 10^{-8} \left[\frac{kg}{s^3 K^4} \right] \text{ vagy } \left[\frac{Watt}{m^2 K^4} \right]$
Az elemi elektromos töltés	$q_e = 1.602 \cdot 10^{-19} [A \cdot s]$

8. VIZSGATEMATIKA

1997/98. II. Elektrodinamika, optika, atomfizika

1. Elektromos alapjelenségek, Coulomb törvénye. Térerősség, az elektrosztatikus tér konzervatív tulajdonsága. A potenciál.
2. Az elektromos megosztás jelensége vezetőkben. Az elektromos indukcióvektor és fluxusa. Gauss törvénye.
3. Az elektrosztatika Laplace-Poisson egyenlete. Határfeltételek elektrosztatikus mezőben.
4. Elektromos vezetés. Áramerősség, áramsűrűség. Vezetőképesség, Ohm törvénye, differenciális alak.
5. A töltésmegmaradás törvénye stacionárius áramokra, Kirchhoff-törvények
6. Elektromos áram munkája, teljesítménye, Joule-hő.
7. Egyenáram mágneses tere, gerjesztési törvény. Hosszú, egyenes vezető, hosszú egyenes tekercs mágneses tere.
8. Mágneses indukció, a mágneses indukció fluxusa. A mágneses mező forrásmentessége
9. *Anyagok mágneses tulajdonságai. Dia-, paramágnesség. Ferromágnesség, a hiszterézis görbe.
10. Ampere-erő, Lorentz-erő, a mozgási indukció jelensége.
11. A nyugalmi indukció jelensége. önindukció, kölcsönös indukció.
12. Általános Kirchhoff-huroktörvény. Tranziens jelenségek.
13. Eltolási áram, Ampere-Maxwell gerjesztési törvény. A töltés megmaradása.
14. Maxwell-egyenletek
15. Az elektromágneses (EM) mező energia mérlege.
16. (EM) hullámegyenlet homogén izotrop szigetelőben. Monokromatikus síkhullám.
17. Az (EM) síkhullám transzverzalizása. Elektromos és mágneses tér kapcsolata síkhullámban. Energiaterjedés EM hullámban.
18. Polarizációs állapot. Fényhullám intenzitása, az interferencia jelensége.
19. Fermat-elve, a geometria optika elemei. Tükrök lencsék.
20. Spektrumok típusai: folytonos, vonalas. Hőmérsékleti sugárzás tulajdonságai. Atomok vonalas színe (emissziós, abszorpció).
21. Az EM sugárzás részecske természete: a foton. Hullám - részecske dualitás. Külső, belső fotoeffektus.
22. Atomi elektronok kvantumszámai. Az elektronspin.
23. Hullámfüggvény, megtalálási valószínűség. Fizikai mennyiségek operátora, várható értéke szórása. Heisenberg-féle határozatlansági reláció. Pauli féle kizárási elv.

24. Időtől független Schrödinger-egyenlet. Dobozba zárt részecske. Fémek szabadelektron modellje, Fermi-nívó, vezetési jelenségek fémekben.
25. Gerjesztés, (abszorpció) spontán emisszió, indukált emisszió. Normális, metastabil-nívók. Populáció-inverzió, lézerek, és a hologram
26. Magfizikai alapfogalmak, rendszám, neutronszám, tömegszám, izotópok. Stabilitási görbe. A magok tulajdonságai.
27. Kötési energia, tömeghiány. Fúziós és hasadási reakciók.
28. Rádióaktivitás. Felezési idő, α , β , γ sugárzás. A sugárzás abszorpciója.
29. Rádióaktív sugárzás kölcsönhatása, detektálása, alkalmazása, egészségügyi vonatkozásai.

Miskolc, 1998.

8.1. 1 k apró kérdés

Elektrodinamika, optika, atomfizika.

Hogyan szól a Coulomb törvény? Mi az elektromos térerősség? Mi a megosztás jelensége? Mi az eltolásvektor (-elektromos indukcióvektor)? Milyen összfüggések fejezik ki az elektrosztatikus mező konzervatív tulajdonságát? Mi az elektromos potenciál (-függvény), potenciális energia, és mi a kapcsolatuk? Milyen sebességű lesz egy U potenciálkülönbségen gyorsított m tömegű q töltésű részecske, ha kezdetben $v_0 = 0$ sebessége volt? Mi az eV elektronvolt? Milyen hatást fejt ki a homogén elektromos mező elektromos dipólusra? Milyen hatást fejt ki az inhomogén elektromos mező elektromos dipólusra? Mit jelent a polarizáció? Miben különbözik poláros, illetve apoláros molekulákat tartalmazó anyag polarizációja? Milyen összfüggés fejezik ki az elektrosztatikus mező forrásosságát?

Mi az elektromos áram, áramerősség, áramsűrűségvektor? Mi az elektromos áram és az elektromos áramsűrűség kapcsolata? Írja fel az óhm törvény lokális formáját! Vezetők fajlagos ellenállása a hőmérséklet növekedésével ... , a félvezetőké ellenben, mi az ellentétes viselkedés oka? Mi a kapcsolófeszültség? Milyen terhelő ellenállás esetén kapunk maximális teljesítményt az adott belső ellenállású telep terhelésén? Igazolja is az állítását! Írja le a Wheatstone híd működését! Mit és milyen kapcsolatban mérünk kompenzációs módszerrel? Milyen kapcsolatban mérünk elektromos áramot? Milyen kapcsolatban mérünk elektromos feszültséget? Hogy a mérési eljárás ne módosítsa az eredeti mérendő mennyiségeket, milyennek kellene lennie az árammérőnek és a feszültségmérőnek. Mire való, és hogyan működik a terheletlen feszültségosztó (potencióméter)? Milyen kapcsolásokban mérhetünk kétpólus karakterisztikákat? Sorbakapcsolt ellenállások feszültségei milyen arányban osztoznak a teljes feszültségen? Mit állít Kirchhoff csomóponti törvénye? Miből származik Kirchhoff csomóponti törvénye? Mit mond ki Kirchhoff huroktörvénye?

Hogyan szól az Ampere féle gerjesztési törvény? Mi az eltolási áramsűrűség vektora. Mikor melyik játszik nagyobb szerepet a vezetési és az eltolási áramok közül? Milyen formula fogalmazza meg a töltésmegmaradás törvényét?

Mi az Ampere erő? Mi a Lorentz erő? Mennyi a Lorentz erő teljesítménye? Homogén mágneses térbe belőtt töltött részecske milyen mozgást végez? Mi a ciklotronfrekvencia?

Mi jellemzi a paramágneses anyagokat? Mi a diamágnesség? Milyen összefüggésekkel fogalmazhatjuk meg a mágneses indukció forrásmentességét?

Mi a nyugalmi indukció jelensége? Mi az önindukció jelensége? Mi a kölcsönös indukció jelensége? Határozza meg hosszú egyenes tekercs önindukciós együtthatóját! Mi az önindukciós együttható egysége, és hogyan jelöljük/nevezzük? Kölcsönös indukció jelenségénél mit jelent a reciprocitás? Írja föl az általánosított hurok törvényt! Mit értünk tranziens jelenség alatt? Mi a váltakozóáramú ellenállása (komplex impedanciája) C kapacitású kondenzátornak, illetve L önindukciójú tekercsnek. Mi az effektív feszültség/áram definíciója periódikusan változó feszültségre illetve áramra? Hatásos teljesítmény.

Kéretik a választ szavakban is és matematikai formában is megfogalmazni! Írja föl a Maxwell egyenleteket differenciális formában! Írja föl a Maxwell egyenletek integrális alakját!

Hogyan adható meg az elektromos mező energiasűrűsége? Hogyan adható meg az mágneses mező energiasűrűsége? Vezesse le a kondenzátorban tárolt elektromos energia kifejezését a síkkondenzátor lemezei közötti mező energiasűrűségéből kiindulva! Vezesse le hosszú, egyenes tekercs mágneses energiáját, a mágneses mező energiasűrűségéből kiindulva! Mit ír le a Poynting vektor? Mit állít az EM mező energia mérlegegyenlete? Mit ad meg a Joule hő?

Írja föl a homogén hullámegyenletet szigetelő közegben az elektromos mező vektorára! Monokromatikus síkhullámot leíró függvény alakja elektromos térre. Mit jelentenek a következők: frekvencia, körfrekvencia, periódusidő, hullámhossz, hullámszám, körhullámszám, fázisfelület, fázissebesség. Mit jelent az a fogalom, hogy poláros fény? A Maxwell egyenletek síkhullámokra felírt alakja. Milyen kapcsolat van EM hullám fázisfelületének haladási iránya, a hullám elektromos tere, és mágneses tere között. Hogyan

osztózik szigetelő közegben haladó síkullám teljes energiasűrűségén az elektromos, és a mágneses tér. Mit értünk fényintenzitás alatt? Mi az interferencia jelensége? Mi az interferencia feltétele? Miért színes a vizen szétterült olajfolt? Milyen hullámhossz tartományba esik a látható fény?

Mit fogalmaz meg Fermat elve? Vezesse le Fermat elve segítségével Snelliuss-Descartes törési törvényét. Mikor jelentkezik, és mi a teljes visszaverődés jelensége? Mi a spektrum? Mi a diszperzió jelensége? Mi a diffrakció? Mitől, és hogyan függ a lencse fókusztávolsága? Mik azok a paraxiális sugarak? Mi jellemzi a valódi képalkotást, és mi a virtuális kép? Rajzolja meg gyűjtőlencse valódi képalkotására a képszerszerítéshez használatos sugarakat! Melyiken sugár mentén ér hamarabb a fény a tárgypontból a kép-pontba? Mi a kromatikus hiba, mi az akromatikus lencse(rendszer)? Adja meg homorú tükör, a domború tükör fókusztávolságát. Írja fel a lencsetörvényt, és a lencsetörvény Newton féle alakját! Hogyan működik a lupe? Az emberi szem működésénél milyen kapcsolatban áll a fizikai fényintenzitás, és a szubjektív fényintenzitás (azaz a fényérzet)?

Mi a foton? Adja meg a foton energiáját, impulzusát! Mi a fény-nyomás? Mi a külső, és mi a belső fényelektromos jelenség (fotoeffektus)? A (külső) fotoeffektusban mitől, és hogyan függ a kilépő elektronok sebessége? Hogyan mérhetjük meg a fényelektromos jelenséggel a Planck állandót? Mit jelent a fényelektromos jelenségnél a küszöbfrekvencia? Vázolja a lézernyomatatók / fénymásolók működésének (közös) fizikai alapjait! Mi a Compton effektus, és miről nevezetes? Mi a részecske - hullám dualitás? Honnan származik a testek színe? Mi az abszolút fekete test? Miért viselkedik egy üreg kis nyílása fekete test (felületeleme)-ként? Vörös színű csillag a melegebb, vagy a kék színű? Mit állít a Wien féle eltolódási törvény? Mit jelöl ebben a λ_{max} ? Legyen az emberi bőrfelszín hőmérséklete $30\text{ }^\circ\text{C}$, a Nap felszíni hőmérséklete pedig 5800 K . a Napra $\lambda_{max} = 550\text{ nm}$, milyen hullámhosszon sugároz maximális intenzitással orcánk? Hogyan, mitől függ az abszolút fekete test egységnyi felületének hőmérsékleti sugárzási teljesítménye?

Hullámfüggvény. Megtalálási valószínűség. Mérhető fizikai mennyiség operátorai. Operátor várható értéke. Várható érték határozatlansága. Heisenberg féle határozatlansági reláció. Atomi elektronok kvantumszámjai. A Pauli féle kizárási elv.

Fotonabszorpció - gerjesztés. A gerjesztés frekvenciafeltétele. A gerjesztett állapot bomlása - spontán foton emisszió. Indukált emisszió. A gerjesztett állapot élettartama. A gerjesztett állapot energiájának határozatlansága. Normál, és metastabil atomi nívók. Populáció inverzió vs. egyensúlyi populáció. Fényerősítés. A LASER. Legegyszerűbb atomi nívórendszer lézer működéshez. A lézerefény sajátosságai. A hologram.

A Rutherford szórás. A mag mérete, sűrűsége. Rendszám, neutronszám, tömegszám. Stabilitási görbe. Izotópok. Kötési energia, tömeghiány. A magerők tulajdonságai. A kötési energia rendszámfüggése. Miről nevezetes a vas / nikkal? Mi a fúzió? Mi a maghasadás? Hol, és hogyan keletkeztek (-nek) a kémiai elemek a vasig? Hol, és hogyan keletkeztek a vason túli kémiai elemek?

A természetes bomlás típusai. Az α sugárzás. A β bomlás és típusai. Az γ sugárzás. Az α , β , γ sugarak ionizálóképességei, áthatolóképességei. Bomlástörvény. Felezési idő. A minta aktivitása, az aktivitás egysége.

Vitéz G. sk, stb. 2005. február 24.

Tárgymutató

- EM energiamegmaradás, 44
- Maxwell egyenletek, 27
- alkalmazások, 55
- apro kérdések, 100
- elektrosztatika, 2
- geom. optika, 65
- gerjesztési törvény, 27
- radioaktív, 91
- vizsgakerdés, 98

- aktivitás (radio-), 92
- alfa bomlás, 93
- áramerősség, 21
- áramforrás, 60
- atomi szilárdság, 11

- beta bomlás, 94
- bomlási állandó, 92
- bomlástörvény, 92

- ciklotronfrekvencia, 31
- Coulomb törvény, 3, 4

- dielektromos állandó, 4
- dioptria, 70
- dipólus elektromos, 8
- drift sebesség, 23

- effektív érték, 40
- áram, 21
- áram munkája, 26
- elektromágneses hullámok, 47
- elektromos áramerősség, 21
- elektronvolt, 8
- elemi töltés, 8
- eltolási áram, 29
- EM, 27
- EM Elektromágneses, 43
- EM energia forrásai-nyelői, 46
- energiatartalom (EM), 45
- energiatartalom (EM), 45

- eredő ellenállás, 57
- eV, 8

- fázisfelület, 49
- fázissebesség, 49
- felezési idő, 92
- fenyőtörési törvény, 68
- Fermat elve, 66
- feszültségforrás, 59
- feszültségosztó, 58
- forogatómunka dipóluson, 10
- fotoeffektus, 77
- fotoeffektus -belső-, 77
- fotoeffektus -külső-, 77
- foton, 76
- foton impulzusa, 77

- galvanométer, 61
- gamma sugárzás, 95
- gerjesztés, 83
- gerjesztés, 83

- hálózati feszültség, 41
- határozatlansági reláció, 75
- Henry, 36
- hullám részecske dualitás, 73
- hullámegyenlet, 48
- hullámfüggvény, 73
- hullámhossz, 49
- hullám szám, 49

- illesztés teljesítményre, 56
- izotóp, 89

- Joule hő, 46

- kapocsfeszültség, 56
- kettpólus karakterisztikák, 63
- Kirchhoff csomóponti, 22
- kolcsonos és önindukció, 35
- kompenzációs mérés, 62
- komplementaritási elv, 72

komplex feszultseg, 38
konzervativ mezo, 5
kvantalt mennyisegek, 72

Laplace-Poisson egy., 15
lencsetörvény, 70
lokalizalt reszecske, 75

mag potencialtere, 89
megosztas, 10
metastabil nivo, 84
monokromatikus sikhullam, 48
mozgasi indukció, 30

nukleonok, 88

onabszorbcio, 94
onindukció, 36
optikai tengely, 69
optikai uthossz, 67

paraxiális sugarak, 72
periodusido, 48
Planck allando, 76
polarizacio, 11
potenciometer, 58
Poynting vektor, 45

rdioaktiv bomlastipusok, 93
reciprocitas, 36
rendsza, 88

spektrum, 79
spontan emisszio, 84
Stefan-Boltzmann torv, 82
szekunder elktronemisszio, 79
szuperpozicio elekromos mezo, 5

teremisszio, 79
termikus elektronemisszio, 79
tolteseloszlas tipusok, 13
toltesmegmaradas, 21
toltessurusegek, 13
tomegszám, 89

valodi kep, 71
vezetokepesseg elektromos, 24
virtualis kep, 71
vizsgatematika, 98
vonalas spektrum, 80

Wheatstone hid, 61
Wien eltolodasi torv., 80