Valószínűségszámítás

- Véletlen események, esemény-algebrák. Gyakoriság és valószínűség, a valószínűség mértéke és tulajdonságai, a valószínűségi mező fogalma. A valószínűség klasszikus meghatározása.
- Feltételes valószínűség. Események függetlensége, a teljes valószínűség tétele, Bayes tétele.
- Folytonos és diszkrét valószínűségi változók és valószínűségeloszlások. Eloszlás- és sűrűségfüggvény. Valószínűségi változók és eloszlások transzformációi. A konvolúció. Többváltozós valószínűségeloszlások.
- Integrális jellemzők: várható érték, szórás, kovariancia, korreláció, feltételes várható érték, momentumok. Karakterisztikus függvény, generátorfüggvények.

- Fontosabb eloszlások: egyenletes-, binomiális-, Pascal-, exponenciális-, gamma-, Poisson-eloszlás, normális-eloszlás és származékai. Véletlen mátrixok, függvények.

- Nagy számok törvényei. Markov- és Csebisev-egyenlőtlenség. Konvergenciafogalmak. A nagy számok gyenge törvényei. Bernoulli-tétel és általánosításai. A nagy számok erős törvényei.

- Határeloszlás-tételek: Moivre–Laplace-tétel, a Poisson-eloszlás mint határeloszlás, a centrális határeloszlás-tétel. Lèvi stabil eloszlások.

- A matematikai statisztika elemei. Statisztikus minta, a becslés jellemzői. Paraméterek becslései (maximum likelihood-módszer, legkisebb négyzetek módszere, iterációs eljárások). Paraméterek intervallum-becslései (koinfidencia-intervallum, konfidencia-szint). Eltérések szignifakinciája. Nem paraméteres problémák. Többváltozós módszerek.

- Extrém kis valószínűségek kezelése, kockázat-analízis.

- Stochasztikus folyamatok. Markov-tulajdonság. Wiener-folyamat, fehér zaj.

- Véletlenszám-generálás. Pszeudo-véletlen számsorozatok. A Monte–Carlo-módszer alapjai (integrálok becslése, folyamatok szimulálása). Markov folyamatok, Fokker–Planck egyenlet.

Valószínűségszámítás/Valószínűség elmélet
(Probability theory)

de Méré lovag:	4 dobásból	1 hatos	1 kockával
	24 dobásból	2 hatos	2 kockával

1654. Pascal – Fermat levelezés

⋮

1933. Kolmogorov axiomatikus megalapozás

A valószínűség klasszikus és kvantumos definíciója között elvi különbség van:

Klasszikusan: mindennek oka van, csak nem mindet ismerjük.

Kvantumosan: nincsenek mélyebb okok, ez az alapfogalom.

A véletlen kísérlet kimenetelét az általunk figyelembe vett feltételek nem határozzák meg egyértelműen. A kísérlet lehetséges kimenetelei az események.

Például:

1. Folyó vízállása $12^{\underline{oo}}$-kor. Végtelen sok kimenetel (esemény) 0-tól MAX-ig.
2. Folyó vízállása $12^{\underline{oo}}$-kor cm-ben. Véges sok kimenetel; $0, 1, 2, \ldots, M\,cm$.
3. Kocka dobás. 6 kimenetel.
4. Két kocka dobása. 36 kimenetel.

Elemi esemény: a kísérlet lehetséges kimenetelei $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$.
Eseménytér (Ω): az elemi események összessége
$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$.
Esemény: az eseménytér részhalmaza $A \subset \Omega$.

Kockadobás: $\omega_1 = \{1\}, \omega_2 = \{2\}, \ldots, \omega_6 = \{6\}$
$\Omega = \big\{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{6\}\big\}$
A pl. páros szám dobása: $A = \big\{\{2\}, \{4\}, \{6\}\big\}$.
A Duna vízállása: $\{0cm\}, \{1cm\}, \ldots$
A esemény pl.: kisebb mint $100cm$

Eseményalgebra

1. Biztos esemény: $A = \Omega$.
2. Lehetetlen esemény: $A = \emptyset$.
3. A és B közül legalább az egyik bekövetkezik (vagy): $A + B$.
4. Mind A mind B bekövetkezik (és): AB.
5. A és B kizárják egymást: $AB = \emptyset$.
6. A nem következik be (neg.): $\bar{A}$.
7. A maga után vonja B-t: $A \subset B$.
   $$\sum_n A_n = ?$$
   $$\prod_n A_n = ?$$
8. A bekövetkezik, de B nem: $A - B = A\bar{B}$.

Egy kísérletet többször is megismételhetünk egymástól függetlenül.

Kockadobás, Duna vízállása

A esemény $\quad k_A$-szor fordul elő,

$A = \Omega$ esemény $\quad k_\Omega = n$-szer fordul elő.

(n-szer végeztük el a kísérletet)

Az A esemény relatív gyakorisága: $k_A/k_\Omega = k_A/n$.

Az A esemény valószínűsége: Ha a kísérletek számát minden határon túl növelnénk, akkor az A esemény előfordulásának relatív gyakorisága egy meghatározott érték körül ingadozik,amit az A esemény valószínűségének nevezünk és $P(A)$-val jelölünk.

$$0 \leqslant k_A \leqslant n \Longrightarrow 0 \leqslant k_A/n \leqslant 1 \Longrightarrow \boxed{0 \leqslant P(A) \leqslant 1} \qquad \text{(K1)}$$

$$k_\Omega = n \Longrightarrow k_\Omega/n = 1 \Longrightarrow \boxed{P(\Omega) = 1} \qquad \text{(K2)}$$

Legyen $A_1, A_2, \ldots$ (véges vagy végtelen sok) esemény, amelyek páronként kizárják egymást: $A_i A_k = \emptyset$, ha $i \neq k$. Ekkor

$$\boxed{P\left(\sum_n A_n\right) = \sum_n P\left(A_n\right)} \tag{K3}$$

Valószínűségeloszlás: K1-2-3-nak eleget tevő függvények.
Valószínűségi mező: (P, Ω).

A lehetetlen esemény valószínűsége 0:

$$A + \emptyset = A, \quad A\emptyset = \emptyset$$

$$P(A) = P(A + \emptyset) \underset{K3}{=} P(A) + P(\emptyset)$$

$$P(\emptyset) = 0$$

Gyak.: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, $P(A_1 + \ldots + A_n) \leqslant P(A_1) + \ldots + P(A_n)$, stb.

Példák a valószínűség meghatározására

Kombinatorikai módszerek

„Hiányzó okok elve”

Dobókocka oldalainak valószínűsége egyenlő

Urnából golyó húzása

Lottószámok kihúzása

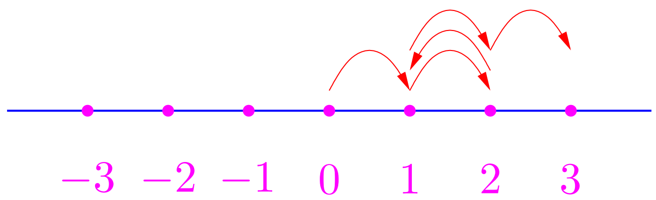
Kártyalapok húzása

Eseménytér:

$\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ + egyenlő valószínűségek

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \ldots = P(\omega_n) = \frac{1}{n}$$

Példa: Bolyongás számegyenesen



Az origóból indulva n lépést megtéve mi a k pont elérésének p_k valószínűsége? Mivel $p_k = p_{-k}$, legyen $k \geqslant 0$.

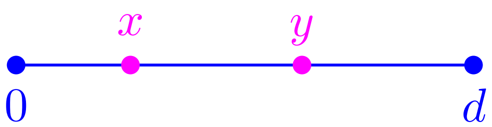
$k + \frac{n-k}{2} = \frac{n+k}{2}$ jobbra és $\frac{n-k}{2}$ balra ugrás n lépésből $\binom{n}{\frac{n-k}{2}}$ féleképpen választható ki, $p_k = \frac{1}{2^n}\binom{n}{\frac{n-k}{2}}$.

Geometriai módszer

Ω geometriai alakzat (egyenes, görbe, sík, tér egy tartománya) mint halmaz egy A részhalmazának véletlen kiválasztása.

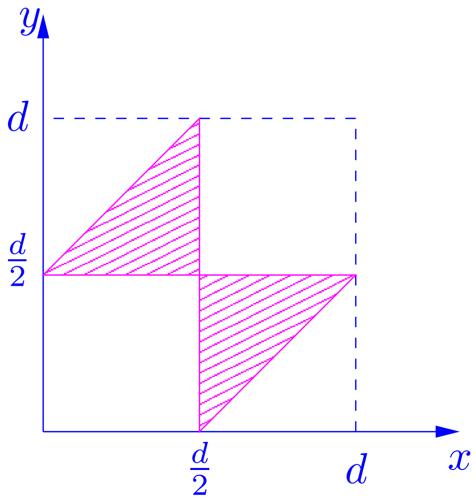
$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

Példa: Háromszög szerkeszthetőségének vsz-e



$$0 \leqslant x \leqslant d$$
$$0 \leqslant y \leqslant d$$

x, y választása véletlen, azonos valószínűséggel bármely pont lehet.
3 szakaszból milyen valószínűséggel szerkeszthető háromszög?



Ha $x < y$: $\quad x,\ y-x,\ d-y$

$$\begin{aligned}
x + (y - x) &> d - y &\Rightarrow\quad& y > d/2\\
x + (d - y) &> y - x &\Rightarrow\quad& y < x + d/2\\
(y - x) + (d - y) &> x &\Rightarrow\quad& x < d/2
\end{aligned}$$

Ha $y < x$: $\quad y,\ x-y,\ d-x$

$$\begin{aligned}
y + (x - y) &> d - x &\Rightarrow\quad& x > d/2\\
y + (d - x) &> x - y &\Rightarrow\quad& x < y + d/2\\
(x - y) + (d - x) &> y &\Rightarrow\quad& y < d/2
\end{aligned}$$

Legyen A és B két esemény. Ekkor n kísérlet során B k_B-szer fordul elő. Tekintsük csak ezeket az eseményeket. Ezek közül néhányszor A is bekövetkezik, legyen ez k_{AB}.

Feltételes valószínűség:

Az A esemény B-re vonatkoztatott feltételes valószínűsége

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}}$$

Ha $n \to \infty$, akkor

$$\frac{k_{AB}}{n} \mapsto P(AB)$$

$$\frac{k_B}{n} \mapsto P(B)$$

$$\frac{k_{AB}}{k_B} = \frac{k_{AB}/n}{k_B/n} \mapsto \frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$(P(B) > 0)$$

$$0 \leqslant k_{AB} \leqslant k_B \to 0 \leqslant P(A|B) \leqslant 1$$

$$k_{BB} = k_B \to P(B|B) = 1$$

$$A_i A_k = \emptyset,\ i \neq k \searrow$$

$$P\left(\sum_n A_n \middle| B\right) = \sum_n P\left(A_n | B\right)$$

Teljes eseményrendszer: $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, ha közülük mindig bekövetkezik egy és csakis egy:

$$A_1 + A_2 + \ldots A_n = \Omega \quad \text{és} \quad A_i A_k = \emptyset, \quad i \neq k$$

Teljes eseményrendszerre K3 miatt:

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$$

A teljes valószínűség tétele: $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ teljes eseményrendszer, $P(B_i) > 0 \quad \forall i$, A tetszőleges esemény. Ekkor

$$\boxed{P(A) = \sum_n P(A|B_n) P(B_n)}$$

$$\sum_n \frac{P(AB_n)}{P(B_n)} P(B_n) = \sum_n P(AB_n) \underset{K3}{=} P\Big(\sum_n AB_n\Big) = P\Big(A \sum_n B_n\Big) = P(A\Omega) = P(A),$$

Ahol felhasználtuk, hogy $(AB_i)(AB_k) = \emptyset$.

Bayes tétele: $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ teljes eseményrendszer,
$P(B_i) > 0$, $i = 1, \ldots, n$
A tetszőleges $P(A) > 0$. Ekkor

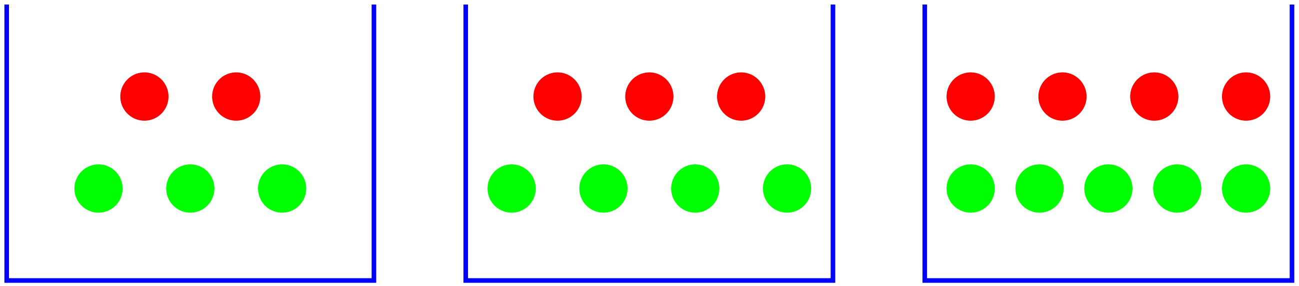
$$P(B_n|A) = \frac{P(A|B_n)P(B_n)}{\sum_{k=1}^{n} P(A|B_k)P(B_k)}$$

$$P(B_n|A) = \frac{P(B_nA)}{P(A)}$$

$$P(A|B_n) = \frac{P(AB_n)}{P(B_n)}$$

$$P(B_n|A)P(A) = P(A|B_n)P(B_n)$$

$$P(B_n|A) = \frac{P(A|B_n)P(B_n)}{\underbrace{\sum_{k=1}^{n} P(A|B_k)P(B_k)}_{P(A)}}$$



$1/2$ $\quad$ $1/3$ $\quad$ $1/6$

P(piros golyó kihúzásának valószínűsége) $=?$

A: piros golyó húzása

B_i: az i. urna választása

$$P(B_1) = 1/2 \qquad P(B_2) = 1/3 \qquad P(B_3) = 1/6$$

$$P(A|B_1) = 2/5 \quad P(A|B_2) = 3/7 \quad P(A|B_3) = 4/9$$

$$P(A) = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{7}\cdot\frac{1}{3} + \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{6} \approx 0.417$$

P(a piros golyót az 1-es urnából húztuk) $=$?

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(A|B_i)P(B_i)} = \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{394}{954}} \approx 0.48$$

$P(B_2|A) \approx 0.35$
$P(B_3|A) \approx 0.18$

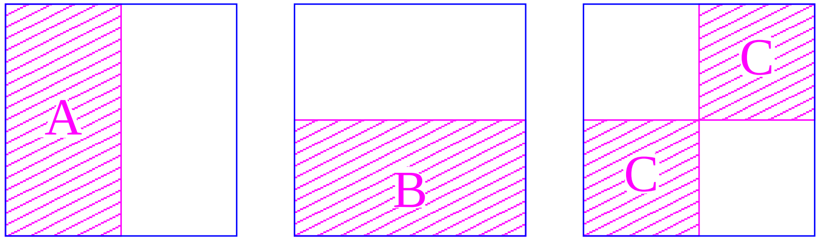
Amikor piros golyót húzunk, akkor azt az esetek 48%-ban az 1., 35%-ban a 2., 18%-ban a 3. urnából tesszük.

Események függetlenek, ha $P(A|B) = P(A)$, azaz

$$\boxed{P(AB) = P(A)P(B)}$$

Több esemény függetlensége pl.:

$$P(AB) = P(A)P(B)$$
$$P(AC) = P(A)P(C)$$
$$P(BC) = P(B)P(C)$$



$$P(A) = 1/2 \qquad P(AB) = 1/4$$
$$P(B) = 1/2 \qquad P(AC) = 1/4$$
$$P(C) = 1/2 \qquad P(BC) = 1/4$$

$$P(ABC) = 1/4 \neq P(A)P(B)P(C) = 1/8$$

Külön kell feltenni a következőket:

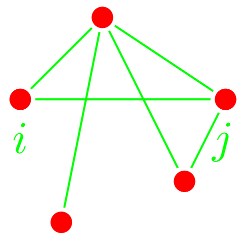
Az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események függetlenek, ha:

$$\boxed{\begin{aligned} P(A_iA_j) &= P(A_i)P(A_j) \\ P(A_iA_jA_k) &= P(A_i)P(A_j)P(A_k) \\ P(A_iA_jA_kA_l) &= P(A_i)P(A_j)P(A_k)P(A_l) \\ &\vdots \\ P\left(\prod_{q=1}^{n} A_{i_q}\right) &= \prod_{q=1}^{n} P(A_{i_q}) \end{aligned}}$$

Valószínűségi változó: az elemi eseményeken értelmezett függvény

$$\xi(\omega) : \Omega \to \begin{cases} \mathbb{R} \\ \mathbb{C} \\ \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

$$\text{Legfontosabbak: } \Omega \to \begin{array}{l} \mathbb{R} \text{ skalár} \\ \mathbb{R}^n \text{ vektor} \\ \mathbb{R}^{n\times n} \text{ mátrix} \end{array}$$



Pl.: két kockadobás összege, céltábla (x, y), fej-írás $\{-1, 1\}$, i és j város távolságából készült mátrix $[d_{ij}]$

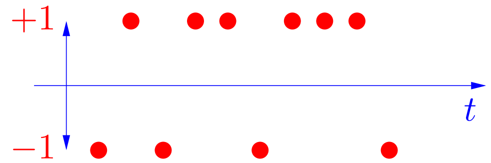
Valószínűségi változók függvényei

$$\eta = \varphi(\xi) = \varphi\big(\xi(\omega)\big)$$

szintén valószínűségi változók.

Sztochasztikus folyamat (t – idő)

$\xi_t(\omega)$: valószínűségi változó egy adott t-re



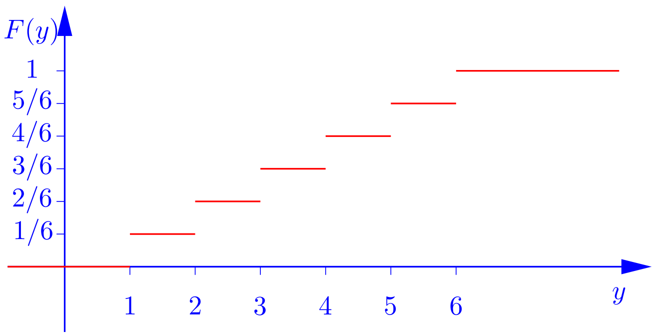
Egyváltozós eset

$$\xi(\omega) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

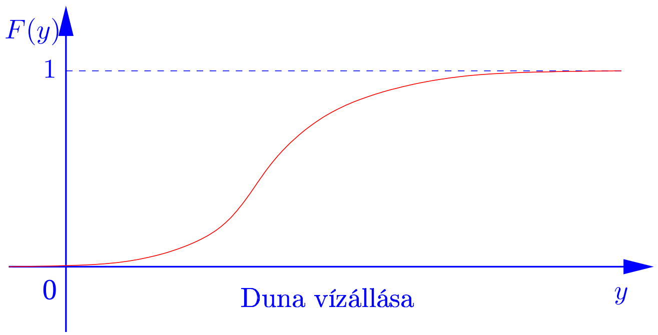
Eloszlásfüggvény

$$F(y) = P(\xi < y)$$

$\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$	$P(\omega)$
⚀ $\longrightarrow 1$	$P($⚀$) = 1/6 = p_1$
⚁ $\longrightarrow 2$	$P($⚁$) = 1/6 = p_2$
⚂ $\longrightarrow 3$	$P($⚂$) = 1/6 = p_3$
⚃ $\longrightarrow 4$	$P($⚃$) = 1/6 = p_4$
⚄ $\longrightarrow 5$	$P($⚄$) = 1/6 = p_5$
⚅ $\longrightarrow 6$	$P($⚅$) = 1/6 = p_6$



Diszkrét



Folytonos

Sűrűségfüggvény

Folytonos eset:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varrho(y)\, dy \qquad \varrho(x) = F'(x)$$

Diszkrét eset:

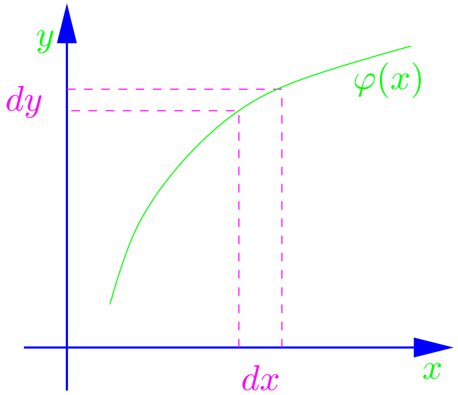
$$F(x) = \sum_{x_n < x} p_n \qquad \varrho(x) = \sum_n p_n \Theta'(x - x_n)$$

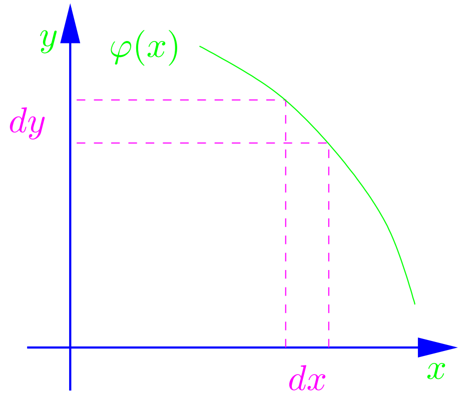
$$F(x) = \sum_n p_n \Theta(x - x_n) \qquad \varrho(x) = \sum_n p_n \delta(x - x_n)$$

Dirac-delta

$$\int f(x)\delta(x)\, dx = f(0)$$

Transzformált változó eloszlása





$$\eta = \varphi(\xi)$$

$$y = \varphi(x) \qquad dy = \varphi'(x)\, dx$$

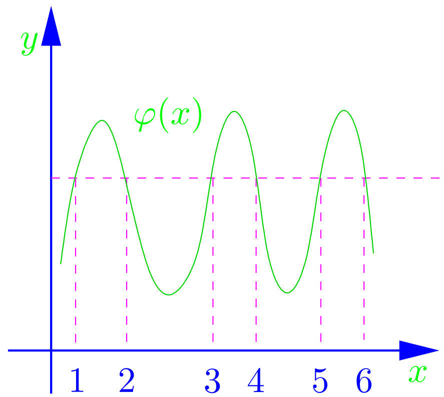
$$\tilde{\varrho}(y)|dy| = \varrho(x)|dx|$$

$$\tilde{\varrho}(y) = \varrho(x)\frac{|\,dx|}{|dy|}$$

$$\tilde{\varrho}(y) = \varrho\left(\varphi^{-1}(y)\right)\,\frac{1}{|\varphi'\left(\varphi^{-1}(y)\right)|}$$

$$\tilde{\varrho}(y) = \sum_n \varrho\left(\varphi_n^{-1}(y)\right)\,\frac{1}{\left|\varphi_n'\left(\varphi_n^{-1}(y)\right)\right|}$$

$\varrho(x),\ \tilde{\varrho}(y)$



Többváltozós eset $\qquad dF = \varrho(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_n$
annak a valószínűsége, hogy a $\xi(\omega)$ n-dimenziós valószínűségi változó vektor az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ körüli $dx_1\, dx_2 \cdots dx_n$ térfogatelembe esik.

$$\vec{\eta} = \vec{\varphi}(\vec{\xi}\,) \qquad \vec{y} = \vec{\varphi}(\vec{x}) \qquad d\vec{y} = D\vec{\varphi}\,(\vec{x})\; d\vec{x}$$

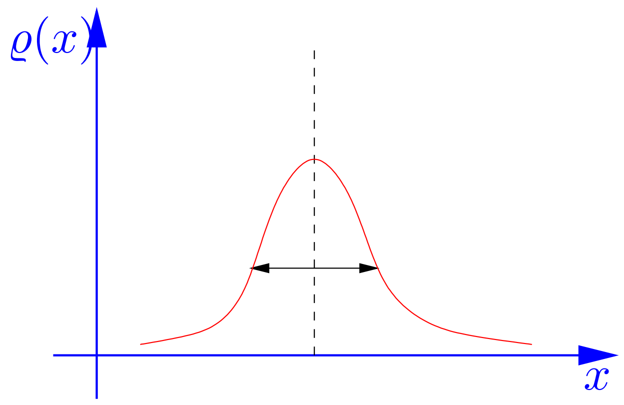
$$\tilde{\varrho}(\vec{y}\,)|d\vec{y}| = \varrho(\vec{x})|d\vec{x}| \quad \longrightarrow \quad \tilde{\varrho}(\vec{y}\,) = \varrho(\vec{x})\frac{|d\vec{x}|}{|d\vec{y}|}$$

$$\tilde{\varrho}(\vec{y}\,) = \varrho\left(\vec{\varphi}^{\,-1}(\vec{y}\,)\right) |\det D\vec{\varphi}^{\,-1}(\vec{y}\,)| = \varrho\left(\vec{\varphi}^{\,-1}(\vec{y}\,)\right) |\operatorname{Jac}\vec{\varphi}^{\,-1}(\vec{y}\,)| =$$

$$= \int \delta\left(\vec{y} - \varphi(\vec{x})\right) \varrho(\vec{x})\, d\vec{x}$$

$$\det Df \equiv \operatorname{Jac} f = \left\| \begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array} \right\|$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varrho(x)\, dx = 1$$



Várható érték (átlag)

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x \varrho(x)\, dx$$

Szórás (várható eltérés, variancia)

$$\mathrm{Var}(x) = \sigma = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$$

$$\sigma^2 = \left\langle (x - \langle x \rangle)^2 \right\rangle = \left\langle x^2 - 2x \langle x \rangle + \langle x \rangle^2 \right\rangle =$$

$$= \left\langle x^2 \right\rangle - 2 \langle x \rangle \langle x \rangle + \langle x \rangle^2$$

A várható érték létezik, ha $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \varrho(x)\, dx < \infty$

Centrális momentumok

$$\mu_k = \left\langle (x - \langle x \rangle)^k \right\rangle$$

Több dimenzióban $\varrho(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$\langle x_k \rangle = \int d^n x \, x_k \varrho(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\langle x_k^2 \rangle = \int d^n x \, x_k^2 \varrho(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\mathrm{Var}(x_k) = \sqrt{\langle x_k^2 \rangle - \langle x_k \rangle^2} = \sigma_k$$

Kovariancia

$$c_{kl} = \langle (x_k - \langle x_k \rangle)(x_l - \langle x_l \rangle) \rangle$$

Korreláció

$$r_{kl} = \frac{c_{kl}}{\sigma_k \sigma_l}$$

$$c_{kk} = \sigma_k^2 \quad r_{kk} = 1$$

Független valószínűségi változók

$$\varrho(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varrho_1(x_1)\varrho_2(x_2)\cdots\varrho_n(x_n)$$

$$\langle x_k \rangle = \int dx_1 \cdots dx_n \, x_k \varrho_1(x_1)\cdots\varrho_n(x_n) = \int dx_k \, x_k \varrho_k(x_k)$$

$$c_{kl} = \int dx_1 \cdots dx_n \big(x_k - \langle x_k \rangle\big)\big(x_l - \langle x_l \rangle\big)\varrho(x_1)\cdots\varrho(x_n) =$$

$$= \int dx_k \big(x_k - \langle x_k \rangle\big)\varrho_k(x_k) \int dx_l \big(x_l - \langle x_l \rangle\big)\varrho_l(x_l) = 0$$

Két független valószínűségi változó összegének eloszlása

$$\eta = \xi_1 + \xi_2 \qquad y = x_1 + x_2 \longrightarrow x_2 = y - x_1 \qquad \varrho_1(x_1) \quad \varrho_2(x_2)$$

$$\varrho(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y - x_1 - x_2)\varrho_1(x_1)\varrho_2(x_2)\, dx_1 \, dx_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \varrho_1(x_1)\varrho_2(y - x_1)\, dx_1 \qquad \text{(konvolúció)}$$

Két valószínűségi változó összegének várható értéke

$$\langle x_1 + x_2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 + x_2) \varrho(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 \varrho(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 +$$
$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} x_2 \varrho(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = \langle x_1 \rangle + \langle x_2 \rangle$$

Két *független* valószínűségi változó összegének szórása

$$\mathrm{Var}^2(x_1 + x_2) = \left\langle \left((x_1 + x_2) - \langle x_1 + x_2 \rangle \right)^2 \right\rangle =$$
$$= \left\langle \left(x_1 + x_2 - \langle x_1 \rangle - \langle x_2 \rangle \right)^2 \right\rangle =$$
$$= \left\langle (x_1 - \langle x_1 \rangle)^2 \right\rangle + \left\langle (x_2 - \langle x_2 \rangle)^2 \right\rangle +$$
$$+ 2 \underbrace{\langle (x_1 - \langle x_1 \rangle)(x_2 - \langle x_2 \rangle) \rangle}_{0} = \mathrm{Var}^2(x_1) + \mathrm{Var}^2(x_2)$$

Karakterisztikus függvény (Fourier-transzformáció)

$$\boxed{\varphi(t) = \langle e^{itx} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \varrho(x) e^{itx}}$$

Konvolúció és a karakterisztikus függvény

$$\varrho(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varrho_1(x)\varrho_2(y-x)\, dx$$

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, e^{ity} \int_{-\infty}^{+\infty} \varrho_1(x)\varrho_2(y-x)\, dx = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \varrho(x) \int_{-\infty}^{+\infty} dy'\, e^{it(x+y')} \varrho_2(y') = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{itx} \varrho_1(x) \int_{-\infty}^{+\infty} dy'\, e^{ity'} \varrho_1(y') = \varphi_1(t) \cdot \varphi_2(t)
\end{aligned}$$

Ahol bevezettük az $y' = y - x$ jelölést.

Generátorfüggvény

Legyen $x_n = n$ p_n valószínűséggel, $\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{itx} \varrho(x)$.

$$\varphi(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{itx} \sum_{n=0}^{\infty} p_n \delta(x-n) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n e^{itn} \quad (e^{it} = z)$$

$$\boxed{G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n}$$

A karakterisztikus függvény diszkrét változata

Momentumok számítása

$$\varphi(t) = \langle e^{itx} \rangle = \left\langle \sum_n \frac{(itx)^n}{n!} \right\rangle = \sum_n \frac{i^n t^n}{n!} \langle x^n \rangle$$

$$\langle x^n \rangle = \frac{1}{i^n} \frac{\partial^n \varphi(t)}{\partial t^n} \bigg|_{t=0}$$

$$\varphi(t) = G\left(e^{it}\right)$$

$$dz = e^{it} i\, dt = iz\, dt \qquad \langle x^n \rangle = \frac{1}{i^n} \frac{\partial^n}{\partial t^n} G\left(e^{it}\right)\Big|_{t=0}$$

$$\frac{\partial}{i\partial t} = z \frac{\partial}{\partial z}; \qquad \langle x^n \rangle = \left[z \frac{\partial}{\partial z}\right]^n G(z)\Big|_{z=1}$$

momentumok $\longleftrightarrow$ generátor függvény $\longleftrightarrow$ eloszlásfüggvény

$$\boxed{\varrho(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \varphi(t)\, dt}$$

$$\varrho(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\, dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \varrho(x') e^{itx'} = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{it(x-x')}\, dt}_{\delta(x-x')} \cdot \varrho(x')\, dx'$$

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{i\tau x}\, d\tau$$

Az összes momentum ismerete egyenlő az eloszlás ismeretével

Mit tudunk egy eloszlásról, ha ismert $\langle x \rangle$ és $\sigma^2 = \left\langle x^2 \right\rangle - \langle x \rangle^2$?

Markov egyenlőtlenség

Legyen $x \geqslant 0$ valószínűségi változó. Létezzen $\varrho(x)$ eloszlásának $\langle x \rangle$ várható értéke. Ekkor tetszőleges $\epsilon > 0$ esetén

$$\boxed{P(x \geqslant \epsilon) \leqslant \frac{\langle x \rangle}{\epsilon}}$$

$$\langle x \rangle = \int_0^\infty \varrho(x) x \, dx \geqslant \int_\epsilon^\infty \varrho(x) x \, dx \geqslant \epsilon \int_\epsilon^\infty \varrho(x) \, dx = \epsilon P(x \geqslant \epsilon)$$

Csebisev egyenlőtlenség

$$\boxed{P(|x - \langle x \rangle| \geqslant \epsilon) \leqslant \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}}$$

$$P(|x - \langle x \rangle| \geqslant \epsilon) = P\left((x - \langle x \rangle)^2 \geqslant \epsilon^2\right) \underset{\text{Markov}}{\leqslant} \frac{\left\langle (x - \langle x \rangle)^2 \right\rangle}{\epsilon^2} = \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

Csebisev egyenlőtlenség

$$P(|x-\langle x\rangle| \geqslant \epsilon) = P\left((x-\langle x\rangle)^{2n} \geqslant \epsilon^{2n}\right) \underset{\text{Markov}}{\leqslant} \frac{\left\langle (x-\langle x\rangle)^{2n}\right\rangle}{\epsilon^{2n}} = \frac{\mu_{2n}}{\epsilon^{2n}}$$

ha μ_{2n} létezik!

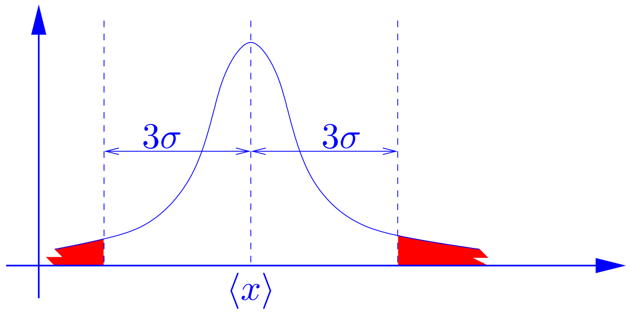
Speciális esetek:

$$P(|x-\langle x\rangle| \geqslant \epsilon) \leqslant \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

$$P(|x-\langle x\rangle| \geqslant \langle x\rangle\,\epsilon) \leqslant \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\,\langle x\rangle^2}$$

$$P(|x-\langle x\rangle| \geqslant \sigma\epsilon) \leqslant \frac{1}{\epsilon^2}$$

$$P\left(\frac{|x-\langle x\rangle|}{\sigma} \geqslant \epsilon\right) \leqslant \frac{1}{\epsilon^2}$$



Például:

$P(|x-\langle x\rangle| \geqslant 3\sigma) \leqslant 1/9 \approx 0.11$

Nevezetes eloszlások

Binomiális eloszlás

Egy kísérletet, aminek két kimenetele van, n-szer megismétlünk.
Az n-szer ismételt kísérletet tekintsük egy eseménynek.

pl.: fej-írás

$\underbrace{\text{FIFIIIFFIF}}_{n\text{db}}$

Valószínűségi változó legyen az, hogy az egyik esemény bekövetkezésének száma: k

p az egyik, $q = 1 - p$ a másik esemény valószínűsége.

- Az egyik k-szor, a másik $n-k$-szor következik be, egymástól függetlenül: $p^k q^{n-k}$.
- Ez összesen $\binom{n}{k}$ módon következhet be.

$$\boxed{p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}}$$

Normáltság:

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1$$

Generátorfüggvény

$$G(z) = \sum_{k=0}^{n} p_k z^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} z^k = (pz+q)^n$$

$G(1) = 1!$

$$\langle k \rangle = z \, \frac{\partial}{\partial z} G(z) \Big|_{z=1} = G'(1) = np(pz+q)^{n-1} \Big|_{z-1} = np$$

$$\left\langle k^2 \right\rangle = z \frac{\partial}{\partial z} z \frac{\partial}{\partial z} G(z) \Big|_{z=1} = G'(1) + G''(1) =$$

$$= n(n-1)p^2 (pz+q)^{n-2} \Big|_{z=1} + np = n(n-1)p^2 + np$$

$$\sigma_k^2 = \left\langle k^2 \right\rangle - \langle k \rangle^2 = G''(1) + G'(1) - G'^2(1) =$$

$$= n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 = npq$$

Geometriai eloszlás

Egy kísérletnek két kimenetele lehet, és ezt függetlenül ismételgetjük. A valószínűségi változó legyen annak a kísérletnek a sorszáma, ahol az egyes számú kimenetel először bekövetkezik.

Pl.: nátha, AIDS, ...

$$k = 1 \qquad k = 2 \qquad k = 3$$

$$p_1 = p \quad p_2 = qp \quad p_3 = q^2 p \quad \cdots \quad p_k = q^{k-1} p$$

Normáltság

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \sum_{k=1}^{\infty} p q^{k-1} = \frac{p}{1-q} = 1$$

Generátorfüggvény

$$G(z) = \sum_{k=1}^{\infty} p q^{k-1} z^k = \frac{pz}{1-qz}$$

$$\langle k\rangle = G'(1) = \frac{p}{1-q} + \frac{pq}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}$$

Pl. ha 1/10 a valószínűség, akkor átlagosan 10-edszerre következik be először az esemény (nátha, AIDS, ...).

$$\sigma_k^2 = G''(1) + G'(1) - {G'}^2(1) =$$

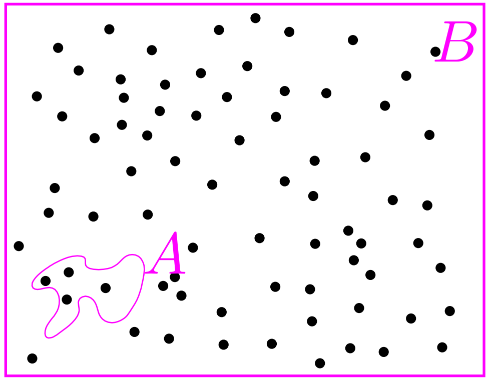
$$= \frac{2pq}{(1-q)^2} + \frac{2pq^2}{(1-q)^3} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} =$$

$$= \frac{2q}{p} + \frac{2q^2}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} =$$

$$= \frac{2}{p} - 2 + \frac{2}{p^2} - \frac{4}{p} + 2 + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = -\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

Pl: $p = 1/10 \quad \sigma = \sqrt{\frac{100\cdot 9}{10}} = \sqrt{90} \approx 9.5$

$p = 1/3 \quad \sigma = \sqrt{9\cdot\frac{2}{3}} = \sqrt{6} \approx 2.5$



n darab pontot véletlenszerűen elszórunk B-n

$$p_A = \frac{\mu_A}{\mu_B} = p$$

n pontból $\approx pn$ darab esik A-ra.

Növeljük egyszerre μ_B-t és n-et úgy, hogy az A-ra eső pontok várható száma állandó maradjon:

$$\lambda = pn = \text{áll.} \quad n \to \infty; \quad p \to 0$$

A-ba eső pontok számának eloszlása

$$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{1}{k!} n(n-1)\cdots(n-k+1)\frac{\lambda^k}{n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n\cdot n\cdots n}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} p_k = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \cdot 1 \cdot 1$$

Poisson eloszlás $\quad p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad \lambda = pn$

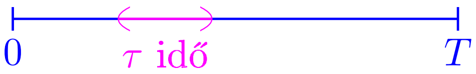
Normáltság $\quad \sum_{k=0}^{\infty} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$

Generátorfüggvény $\quad G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{(\lambda z)^k}{k!} = e^{\lambda(z-1)}$

$$\langle k \rangle = G'(1) = \lambda e^{\lambda(z-1)} \Big|_{z=1} = \lambda$$

$$\sigma^2 = G''(1) + G'(1) - G'^2(1) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

Pl.: Véletlen időbeli folyamatok, melyek bekövetkezésének valószínűsége időben állandó (atom, telefon, hiba, jármű, stb.).



T alatt n esemény

$n \to \infty \qquad \frac{n}{T} = \mu = \text{áll}$

$T \to \infty$

$$p_\tau = \frac{\tau}{T} \qquad p_\tau n = \frac{\tau}{T} n = \mu\tau = \lambda$$

Normális eloszlás

Binomiális eloszlásnál tekintsük az

$$x = \frac{k - \langle k \rangle}{\sigma} = \frac{k - pn}{\sqrt{npq}}$$

átlagtól való standard eltérés eloszlását $n \to \infty$ határesetben!

$$p_k = \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k q^{n-k} \qquad n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \qquad \text{(Stirling formula)}$$

$$p_k \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{\sqrt{2\pi n}}{\sqrt{2\pi(n-k)}\sqrt{2\pi k}} \left(\frac{e}{k}\right)^k \left(\frac{e}{n-k}\right)^{n-k} p^k q^{n-k}$$

$$p_k \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{k}{n}\right)\frac{k}{n}}} e^{n \ln n - k \ln k - (n-k)\ln(n-k) + k \ln p + (n-k) \ln q}$$

$$1 - \frac{k}{n} \approx q; \quad \frac{k}{n} \approx p; \qquad k \approx pn \pm \sqrt{npq}; \longrightarrow \frac{k}{n} \approx p \pm \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

$$p_k \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-k \ln \frac{k}{n} - (n-k) \ln\left(1-\frac{k}{n}\right) + k \ln p + (n-k) \ln q}$$

$$p_k \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-n\left\{\frac{k}{n} \ln \frac{k}{np} + \left(1-\frac{k}{n}\right) \ln\left[\left(1-\frac{k}{n}\right)/q\right]\right\}}$$

$$k = x\sqrt{npq} + pn \qquad \frac{k}{n} = p + x\sqrt{\frac{pq}{n}} \qquad 1 - \frac{k}{n} = q - x\sqrt{\frac{pq}{n}}$$

$$p_k \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-n\left\{\left(p+x\sqrt{\frac{pq}{n}}\right) \ln\left(1+x\sqrt{\frac{q}{np}}\right) + \left(q-x\sqrt{\frac{pq}{n}}\right) \ln\left(1-x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)\right\}}$$

$$\ln(1 \pm x) \approx \pm x - \frac{x^2}{2} + \ldots$$

$$p_k \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-n\left\{\left(p+x\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)\left(x\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{1}{2}x^2 \frac{q}{np}\right) + \left(q-x\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)\left(-x\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{1}{2}x^2 \frac{p}{nq}\right)\right\}}$$

$$p_k \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-x^2/2} \qquad\qquad 1 = \Delta k \approx dx\sqrt{npq}$$

$$p_k = p_k \Delta k \approx p(x)\,dx = p(x)\frac{1}{\sqrt{npr}}$$

$$p(x) = \sqrt{npq}\,p_k = \sigma p_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

Normáltság
$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx = 1$$

Karakterisztikus függvény

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)e^{itx}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2+itx}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\underbrace{(x-it)}_{u}{}^2 - t^2/2} \underbrace{dx}_{du} = e^{-t^2/2}$$

Általános alak $\quad \mathcal{N}(m,\sigma) := p_N(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

$$\varphi_N(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} e^{itx} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x-m-i\sigma^2 t\right)^2 - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + imt}\, dx = e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2} + imt}$$

Centrális momentumok $(m = 0)$

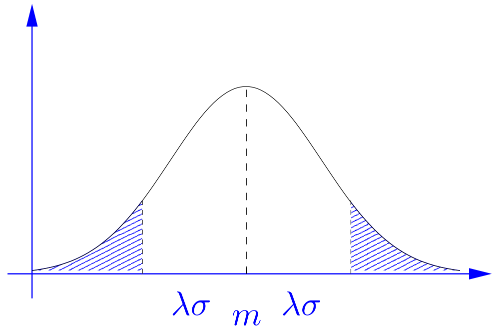
$$\mu_{2n+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2} x^{2n+1}\, dx = 0$$

$$\mu_{2n} = (-1)^n \frac{\partial^{2n}}{\partial t^{2n}} e^{-\sigma^2 t^2/2}\Big|_{t=0} = (-1)^n \frac{\partial^{2n}}{\partial t^{2n}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\sigma^{2k} t^{2k}}{2^k k!}\Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{1}{2^n} \sigma^{2n} \frac{(2n)!}{n!} = \sigma^{2n} \cdot (2n-1) \cdot (2n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 1$$

$2^n \cdot n! = 2n \cdot 2(n-1) \cdot 2(n-3) \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 2$

A haranggörbe tulajdonságai



$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$P(|x-m| > \lambda\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{m-\lambda\sigma} \oplus \int_{m+\lambda\sigma}^{+\infty} e^{\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\, dx \underset{x=m+\sigma u}{=}$$

$$= 1 - \int_{-\lambda}^{+\lambda} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\, du = 1 - \int_{-\lambda}^{0} \oplus \int_{0}^{+\lambda} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\, du =$$

$$= 1 - 2\int_{0}^{\lambda} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2}\, du = 1 - 2\left[\int_{0}^{\lambda} \oplus \int_{-\infty}^{0}\right] \oplus \underbrace{2\int_{-\infty}^{0}}_{1} \ldots =$$

$$= 2 - 2\int_{-\infty}^{\lambda} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\, du = 2\big(1 - \Phi(\lambda)\big)$$

$$P(|x-m| < \lambda\sigma) = 1 - P(|x-m| > \lambda\sigma) = 2\Phi(\lambda) - 1$$

$\lambda = 1$	0.68	3σ-n belül van az eloszlás 99%-a.
$\lambda = 2$	0.95	V.ö. 10% Csebisev becslés.
$\lambda = 3$	0.997	

Két normális eloszlású változó összege

$$y = x_1 + x_2 \qquad \begin{aligned} p_1(x_1) &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-(x_1-m_1)^2/2\sigma_1^2} \\ p_2(x_2) &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-(x_2-m_2)^2/2\sigma_2^2} \end{aligned}$$

$$p(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 p_1(y-x_2) p_2(x_2) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \tfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-(y-x_2-m_1)^2/2\sigma_1^2 - (x_2-m_2)^2/2\sigma_2^2} = ?$$

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) \cdot \varphi_2(t)$$

$$\varphi(t) = e^{-\frac{\sigma_1^2 t^2}{2} + i m_1 t} e^{-\frac{\sigma_2^2 t^2}{2} + i m_2 t} = e^{-\underbrace{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}_{\sigma^2} t^2/2 + i \underbrace{(m_1+m_2)}_{m} t}$$

Ez is Gauss (normális) eloszlás: $$p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} e^{-\frac{(y-m_1-m_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}$$

Többdimenziós normális eloszlás

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\sqrt{\det B}}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{ij} B_{ij}(x_i - m_i)(x_j - m_j)}$$

$$\det B > 0$$

$$B_{ij} = B_{ji}$$

Normáltság

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \ldots dx_n \, p(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$x_i - m_i = \sum_j \Theta_{ij} y_j$$

$$\vec{x} - \langle \vec{x} \rangle = \Theta \vec{y}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} dy_1 \ldots dy_n |\det \Theta| \frac{\sqrt{\det B}}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2} y^T \Theta^T B \Theta y} = \ldots$$

$$\Theta^T B \Theta = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$$

$$\ldots = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} dy_1 \ldots y_n |\det \Theta| \frac{\sqrt{\det B}}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2} = \ldots$$

$$\det B = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

$$|\det \Theta| = 1 \qquad \text{Ortogonális transzformáció}$$

$$\ldots = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} dy_1 \ldots dy_n \sqrt{\frac{\lambda_1 \cdots \lambda_n}{(2\pi)^n}} e^{-\frac{1}{2}\sum_i \lambda_i y_i^2} =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} dy_i \sqrt{\frac{\lambda_i}{2\pi}} e^{\frac{1}{2}\lambda_i y_i^2} \right]}_{1} = 1$$

$$\langle x_i \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \dots dx_n \, x_i \, p(x_1, x_2, \dots, x_n) = m_i$$

$$C_{kl} = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \dots dx_n (x_k - m_k)(x_l - m_l) p(x_1, \dots, x_n) =$$

$$= \frac{\sqrt{\det B}}{(2\pi)^{n/2}} \cdot (-2) \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial B_{kl}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \dots dx_n e^{-\frac{1}{2} \sum_{ij} B_{ij}(x_i - m_i)(x_j - m_j)} =$$

$$= -2 \frac{\sqrt{\det B}}{(2\pi)^{n/2}} \frac{\partial}{\partial B_{kl}} \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det B}} = \frac{1}{\det B} \frac{\partial}{\partial B_{kl}} \det B =$$

$$= \frac{1}{\det B} \frac{\partial}{\partial B_{kl}} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{k+i} B_{ki} \det B^{(ki)} =$$

$$= (-1)^{k+l} \frac{\det B^{(kl)}}{\det B} = \left(B^{-1}\right)_{kl}$$

Kovariancia mátrix $C = B^{-1}$

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det C}} e^{-\frac{1}{2\det C}\sum_{ij} C_{ij}(x_i - m_i)(x_j - m_j)}$$

$$C_{ik} = \sigma_i \sigma_k R_{ik}$$

$$\frac{C_{ik}}{\det C} = \frac{1}{\det R} \frac{R_{ik}}{\sigma_i \sigma_k}$$

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det R}\sigma_1 \cdots \sigma_n} e^{-\frac{1}{2\det R}\sum_{ij} R_{ij} \frac{(x_i - m_i)}{\sigma_i} \frac{(x_j - m_j)}{\sigma_j}}$$

Speciálisan $n = 2$

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x_1-m_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2-m_2)^2}{\sigma_2^2} - 2r\frac{(x_1-m_1)}{\sigma_1}\frac{(x_2-m_2)}{\sigma_2}\right]}$$

A normálisból származtatott eloszlások

Lognormális

$$x \quad \text{lognormális} \qquad\qquad p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(y-m)^2/2\sigma_0^2}$$

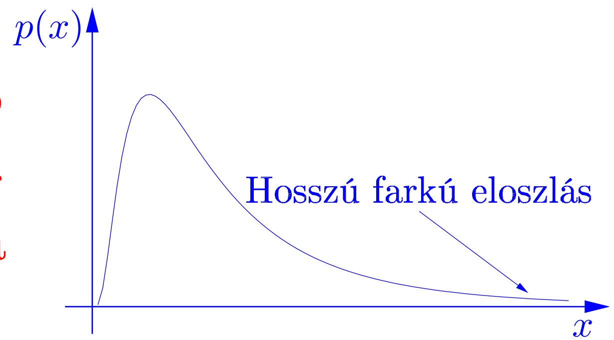
$$y = \log x \quad \text{normális} \qquad\qquad dy = \frac{dx}{x}$$

$$p_{\mathrm{LN}}(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} e^{-\frac{1}{2}(\log x - m)^2/\sigma_0^2} \frac{dx}{x}$$

$$\langle x \rangle = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}x} x\, e^{-\frac{1}{2}(\log x - m)^2/\sigma_0^2}\, dx = e^{m+\sigma_0^2/2}$$

$$\sigma^2 = e^{2m+\sigma_0^2}\left(e^{\sigma_0^2} - 1\right)$$

Részvények árfolyama, törési folyamatok, fraktálok adatai, galaxisok adatai, stb. Az egyik legérdekesebb eloszlás, jelzi a komplex folyamatok meglétét.

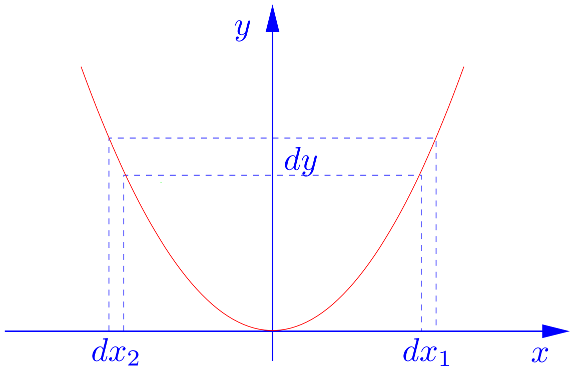


A χ^2- és a χ-eloszlás

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ normális eloszlású, 0 várható értékű 1 szórású valószínűségi változók

$$\chi^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

$$n = 1 \quad \longrightarrow \quad \chi^2 = x_1^2; \qquad y = x^2; \quad \varrho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$



$$\tilde{\varrho}(y)|dy| = \varrho(x_1)|dx_1| + \varrho(x_2)|dx_2|$$

$$x_1 = \sqrt{y} \qquad dx_1 = \frac{1}{2\sqrt{y}}\, dy$$

$$x_2 = -\sqrt{y} \qquad dx_2 = -\frac{1}{2\sqrt{y}}\, dy$$

$$\tilde{\varrho}(y) = \varrho\left(\sqrt{y}\right) \frac{1}{2\sqrt{y}} + \varrho\left(-\sqrt{y}\right) \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-y/2}$$

Karakterisztikus függvény

$$\varphi_1(t) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-y/2+iyt}\, dy$$

$$y = u^2 \qquad\qquad dy = 2u\, du$$

$$\varphi_1(t) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi u}} e^{-u^2/2+iu^2 t}\, 2u\, du = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\left(\frac{1}{2}-it\right)u^2}\, du =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{1}{2}-it\right)u^2}\, du = \sqrt{\frac{\pi}{2\pi(\frac{1}{2}-it)}} = \frac{1}{(1-2it)^{1/2}}$$

Ahol felhasználtuk, hogy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\varphi_n(t) = \varphi_1^n(t) = \frac{1}{(1-2it)^{n/2}}$$

$$I(\beta) = \int_0^\infty x^\beta e^{-\frac{x}{2}+itx}\,dx = \int_0^\infty x^\beta e^{-\left(\frac{1}{2}-it\right)x}\,dx$$

Az $y = \left(\frac{1}{2} - it\right)x$ és $dx = dy/\left(\frac{1}{2} - it\right)$ jelölésekkel

$$I(\beta) = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}-it\right)^{\beta+1}} \underbrace{\int_0^\infty y^\beta e^{-y}\,dy}_{\Gamma(\beta+1)}$$

$$\beta + 1 = \tfrac{n}{2}$$

$$\beta = \tfrac{n}{2} - 1$$

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)2^{n/2}} I\left(\frac{n}{2} - 1\right)$$

$$\varrho_n(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)2^{n/2}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-x/2}$$

n szabadsági fokú χ^2-eloszlás

Pl.: Gáz összenergiájának eloszlása $E \sim v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 + \cdots$

$$\left\langle \chi^2 \right\rangle = n \left\langle x_1^2 \right\rangle = n$$

$$\sigma^2_{\chi^2} = n \left\{ \left\langle x_1^4 \right\rangle - \left\langle x_1^2 \right\rangle^2 \right\}$$

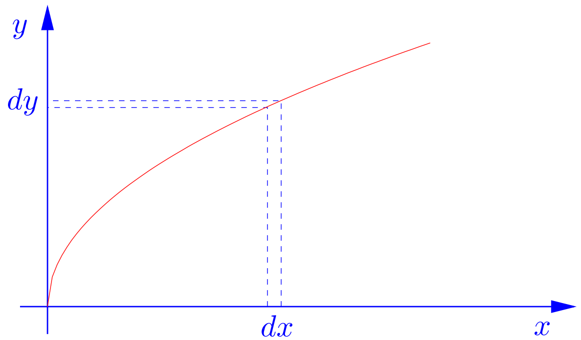
$$\left\langle x_1^4 \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x_1^2/2}\, dx_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^4 e^{-\beta x_1^2/2}\, dx_1 \Big|_{\beta=1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 4 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta x_1^2/2}\, dx_1 \Big|_{\beta=1} = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \sqrt{\frac{2\pi}{\beta}} \Big|_{\beta=1} =$$

$$= 4 \left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{3}{2} \right) \beta^{-5/2} \Big|_{\beta=1} = 3$$

$$\sigma^2_{\chi^2} = n(3-1) = 2n$$

$$\chi = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$



$$\tilde{\varrho}(y)\, dy = \rho(x)\, dx$$

$$\tilde{\varrho}(y) = \rho(y^2)\, 2y$$

$$y = \sqrt{x} \quad \longrightarrow \quad x = y^2$$

$$dx = 2y\, dy$$

$$\varrho_n(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{(n-2)/2}} x^{n-1} e^{-x^2/2}$$

n szabadsági fokú χ-eloszlás

Pl.: $n = 3$ gáz sebességének eloszlása

Student- és Cauchy-eloszlások

$$t = \frac{\sqrt{n}y}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}} \qquad x_1, x_2, \ldots, x_n, y \in \mathcal{N}(0,1)$$

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} \qquad g(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{(n-2)/2}} x^{n-1} e^{-x^2/2}$$

$$\varrho(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} \delta\left(t - \frac{\sqrt{n}y}{x}\right) f(y) g(x)\, dy\, dx =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{x}{\sqrt{n}} f\left(\frac{xt}{\sqrt{n}}\right) g(x)\, dx = \ldots$$

$$\delta(f(x)) = \sum_n \delta(x - x_n) \frac{1}{|f'(x_n)|} \qquad f(x_n) = 0$$

$$\delta(f'(x_n)(x - x_n))$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n; \quad h(x_1), h(x_2), \ldots, h(x_n)$$

$$\delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|} \delta(x)$$

$$g = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\varrho(g) = \int \delta(g - g(x_1, \ldots, x_n)) h(x_1) \cdots h(x_n)\, dx_1 \cdots dx_n$$

$$\ldots = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{(n-2)/2}} \int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2 t^2}{2n}} x^{n-1} e^{-x^2/2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{(n-2)/2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \int_0^\infty x^n e^{-\left(\frac{t^2}{2n}+\frac{1}{2}\right)x^2}\, dx = \ldots$$

$$y = \left(\frac{t^2}{2n} + \frac{1}{2}\right) x^2 \qquad dy = \left(\frac{t^2}{2n} + \frac{1}{2}\right) 2x\, dx$$

$$x = \left(\frac{t^2}{2n} + \frac{1}{2}\right)^{-1/2} \sqrt{y} \qquad dy = \left(\frac{t^2}{2n} + \frac{1}{2}\right)^{1/2} 2\sqrt{y}\, dx$$

$$\ldots = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{(n-2)/2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \int_0^\infty \frac{y^{n/2}}{\left(\frac{t^2}{2n} + \frac{1}{2}\right)^{n/2}} e^{-y} \frac{1}{2\left(\frac{t^2}{2n} + \frac{1}{2}\right)^{1/2}} \frac{dy}{\sqrt{y}} =$$

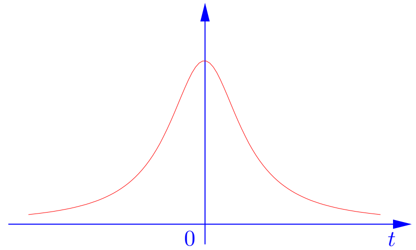
$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{(n-2)/2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \frac{1}{\left(\frac{t^2}{2n} + \frac{1}{2}\right)^{(n+1)/2}} \underbrace{\int_0^\infty y^{\frac{n-1}{2}} e^{-y}\, dy}_{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} = \ldots$$

$$\ldots = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} = S_n(t)$$

Student- vagy t-eloszlás

$n = 1$ Cauchy-eloszlás

$$C(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2}$$



Mikor létezik t várható értéke? $$\int_{-\infty}^{+\infty} S_n(t)|t|\, dt < +\infty$$

$$t \to \infty \qquad S_n(t)|t| \sim \frac{|t|}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+2}{2}}} \sim \frac{|t|}{|t|^{n+1}} = \frac{1}{|t|^n}$$

$$\int \frac{1}{|t|^n}\, dt \sim \begin{cases} \frac{1}{|t|^{n-1}} & \text{, ha } n \geqslant 2 \\ \log(t) & \text{, ha } n = 1 \text{ (Cauchy eloszlás)} \end{cases}$$

Az $n = 1$ Cauchy eloszlásnak nincs várható értéke!

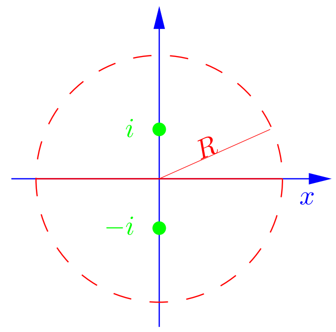
A Cauchy eloszlás karakterisztikus függvénye

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi\,(1+x^2)} e^{ixt}\,dx = \ldots$$

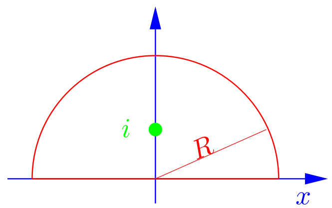
$$1 + x^2 = 0 \qquad \text{pólusok} \qquad \frac{1}{R^2} R\pi$$

$$x = \pm i$$

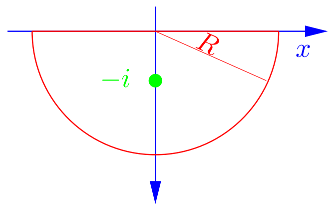
$$e^{ixt} \qquad (x = \alpha + i\beta)$$



$$t > 0 \qquad e^{i\alpha t - \beta t} \longrightarrow 0 \qquad \beta \longrightarrow +\infty$$



$$t < 0 \qquad e^{i\alpha t - \beta t} \longrightarrow 0 \qquad \beta \longrightarrow -\infty$$



Ha $t > 0$, akkor az $x = +i$ pólust fogjuk körül:

$$\varphi(t) = \oint \frac{1}{\pi\,(1+z^2)} e^{izt}\,dz = 2\pi i \sum_{x_p \text{pólus}} \operatorname*{Res}_{x_p} f(z) = \frac{1}{2\pi i} 2\pi i\, e^{-t} = e^{-t}$$

Ha $t < 0$, akkor az $x = -i$ pólust fogjuk körül:

$$\varphi(t) = \oint \frac{1}{\pi\,(1+z^2)} e^{izt}\,dz = \ldots = -\frac{1}{2\pi i}(-2\pi i)\, e^{t} = e^{t}$$

$$\boxed{\varphi(t) = e^{-|t|}}$$

$\left.\frac{d\varphi(t)}{dt}\right|_{t=0} = ?$ nem differenciálható 0-ban.

A karakterisztikus függvény nem n-differenciálható $\Longleftrightarrow$ nem létezik az n. momentum.

A Stirling formula

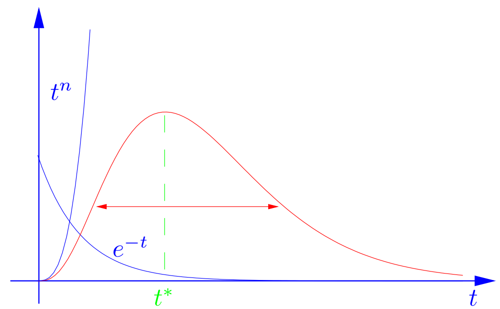
$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n e^{-t}\, dt = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \beta^n} \int_0^\infty e^{-\beta t}\, dt \bigg|_{\beta=1} =$$

$$= (-1)^n \, \frac{\partial^n}{\partial \beta^n} \frac{1}{\beta}\bigg|_{\beta=1} = (-1)^n (-1)(-2)(-3)\cdots(-n) \, \frac{1}{\beta^{n+1}}\bigg|_{\beta=1} = n!$$

$$n! = \int_0^\infty t^n \, e^{-t}\, dt = \int_0^\infty e^{n \log t - t}\, dt$$



$$\frac{\partial}{\partial t}(n\log t - t)\bigg|_{t^*} = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \begin{aligned} \frac{n}{t^*} - 1 &= 0 \\ t^* &= n \\ x &= t - t^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(n\log(t^*+x) - t^* - x) &= n\log\left(n\left(1+\frac{x}{n}\right)\right) - n - x = \\
&= n\log n + n\log\left(1+\frac{x}{n}\right) - n - x = \\
&= n\log n + n\left[\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + \cdots\right] - n - x = \\
&= n\log n - n - \frac{x^2}{2n} + \cdots
\end{aligned}$$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2}$

$$n! \approx \int_{-n}^{\infty} dx\, e^{n\log n - n} e^{-\frac{x^2}{2n}+\dots} \approx$$

$$\approx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{n\log n - n} e^{-\frac{x^2}{2n}}\, dx = e^{n\log n - n}\sqrt{2\pi n}$$

$$\boxed{n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}$$

Nyeregpont-módszer

$$\int e^{-\Phi(t)}\, dt \approx e^{-\Phi(t^*)} \int e^{-\frac{1}{2}\Phi''(t^*)(t-t^*)^2}\, dt \approx e^{-\Phi(t^*)} \sqrt{\frac{2\pi}{\Phi''(t^*)}},$$

ahol $\Phi'(t^*) = 0$.

Nagy számok törvényei

Sztochasztikus konvergencia

Legyen η_n valószínűségi változók sorozata. Ha $\exists \eta$ valószínűségi változó, hogy $\forall \epsilon > 0$ esetén

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} P(|\eta_n - \eta| > \epsilon) = 0,}$$

akkor η_n stochasztikusan konvergál η-hoz: $\eta_n \Rightarrow \eta$ vagy $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{st} \eta_n = \eta$. Ha

$$\boxed{P\left(\lim_{n\to\infty} \operatorname{st} \eta_n = \eta\right) = 1,}$$

akkor η_n 1 valószínűséggel konvergál η-hoz.

Gyenge tételek – erős tételek

$$\eta_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{n}$$

A nagy számok egy gyenge törvénye

Ha $\xi_1, \ldots, \xi_n$ azonos várható értékű és szórású független valószínűségi változók, $\langle \xi_k \rangle = \langle \xi \rangle$, akkor

$$\eta_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{n} \Rightarrow \langle \xi \rangle$$

Bizonyítás:

$$P\left(\left| \frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{n} - \langle \xi \rangle \right| > \epsilon \right) \underset{\text{Csebisev}}{\leqslant} \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 n}$$

$$\langle \eta_n \rangle = \langle \xi \rangle \qquad\qquad \left\langle \eta_n^2 \right\rangle - \left\langle \eta_n \right\rangle^2 = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

Nagy számok egy erős törvénye

Ha még $\left\langle \xi_i^4 \right\rangle \leqslant K$, $i = 1, 2, \ldots$ is igaz, akkor

$$P\left(\lim_{n \to \infty} \frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{n} = \langle \xi \rangle \right) = 1$$

Előírt pontosságú közelítéshez szükséges kísérletek száma

$$P\left(\left|\frac{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n}{n}-\langle\xi\rangle\right|<\epsilon\right)\geqslant 1-p_0$$

Ha ϵ, p_0 kicsi, mekkorának kell n-et választani?

Pl.: Csebisev

$$P\left(\left|\frac{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n}{n}-\langle\xi\rangle\right|\geqslant\epsilon\right)\leqslant\frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}$$

$$\frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}\leqslant p_0$$

$$\boxed{n\geqslant\frac{\sigma^2}{\epsilon^2 p_0}}$$

Centrális határeloszlás-tétel

Megmagyarázza, miért olyan gyakori a normális eloszlás a természetben.

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók. Tegyük fel, hogy $\sigma_\xi^2 = \langle \xi^2 \rangle - \langle \xi \rangle^2$ létezik (+ még a 3. vagy 4. momentum is). Legyen ζ_n az átlagtól való eltérés a szórásban mérve:

$$\zeta_n = \frac{1}{\sqrt{n}\,\sigma} \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i - n \langle \xi \rangle \right)$$

$\varrho(\xi)$ ismert

$$\zeta_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\xi_i - \langle \xi \rangle}{\sqrt{n}\,\sigma} = \sum_{i=1}^{n} \chi_i; \qquad \chi_i = \frac{\xi_i - \langle \xi \rangle}{\sqrt{n}\,\sigma}$$

Milyen ζ_n eloszlása az $n \to \infty$ határértékben?

Példa: Exponenciális eloszlású valószínűségi változók összege

$$\eta_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots \xi_n \qquad \begin{aligned} \langle \xi_i \rangle &= 1 \\ \sigma_{\xi_i} &= 1 \end{aligned}$$

$$\varrho_1(x) = e^{-x} \qquad x \geqslant 0$$

$$\varrho_2(x) = \int_0^x e^{-(x-y)} e^{-y}\, dy = e^{-x} \int_0^x dy = x\, e^{-x}$$

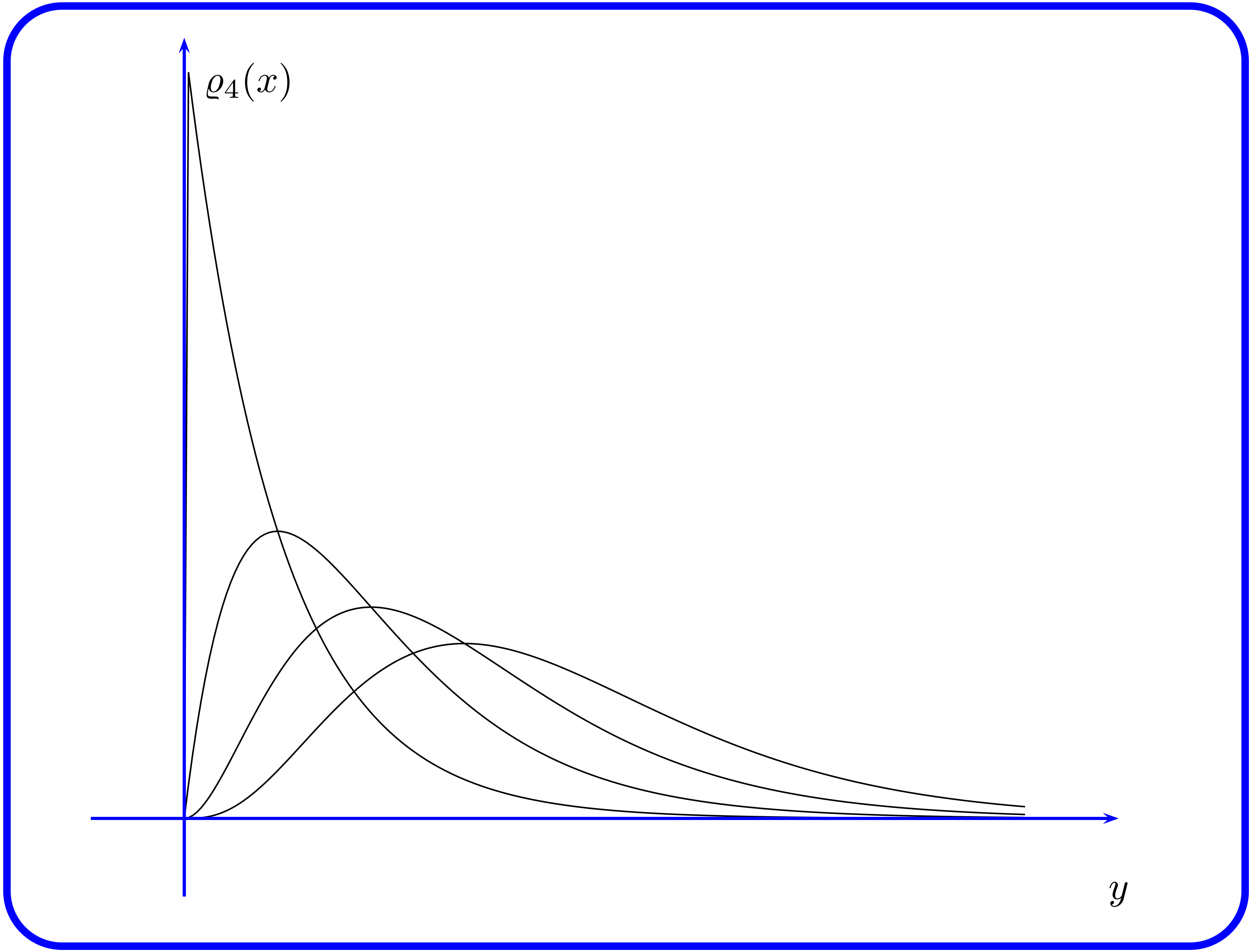
$$\varrho_3(x) = \int_0^x e^{-(x-y)} y\, e^{-y}\, dy = e^{-x} \int_0^x y\, dy = \frac{x^2}{2} e^{-x}$$

$$\vdots$$

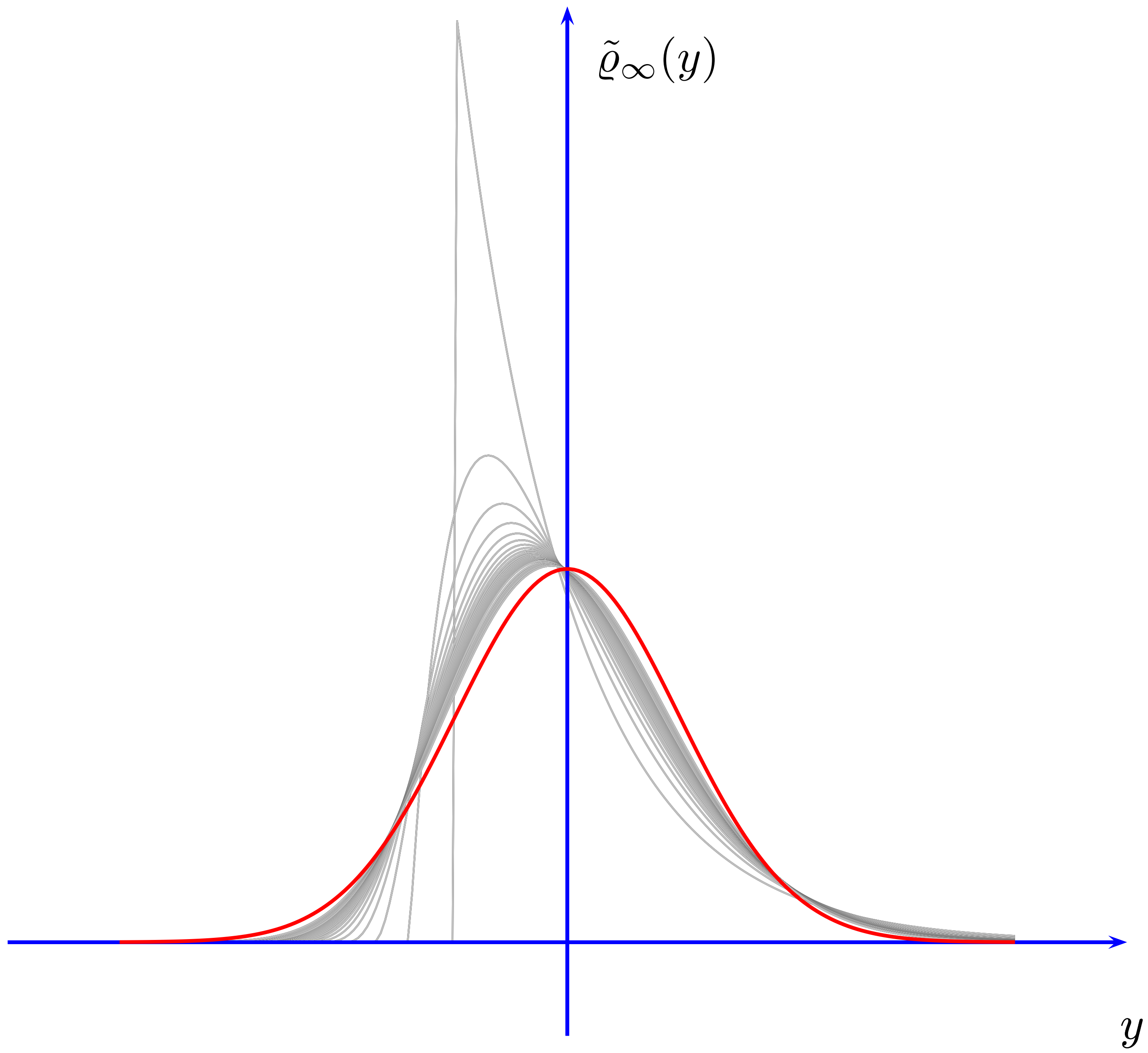
$$\varrho_n(x) = \frac{x^{(n-1)}}{(n-1)!} e^{-x} \qquad \longrightarrow \qquad \zeta_n = \frac{\eta_n - n}{\sqrt{n}} \qquad \begin{aligned} \langle \zeta_n \rangle &= 0 \\ \sigma_{\zeta_n} &= 1 \end{aligned}$$

$$\tilde{\varrho}_n(y) = \sqrt{n}\, \varrho_n\left(\sqrt{n}\, y + n\right) \qquad y \geqslant -\sqrt{n}$$

Ahol ζ_n normált, centrált valószínűségi változó.



$\varrho_4(x)$
y


$\tilde{\varrho}_\infty(y)$
y

Példa: Egyenletes eloszlású valószínűségi változók összege

$$\eta_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots \xi_n \qquad \begin{aligned} \langle \xi \rangle &= 1/2 \\ \sigma_\xi &= 1/12 \end{aligned}$$

$$\varrho_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 < x < 1; \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \varrho_n(x) &= \int_0^1 \varrho_{n-1}(x-y)\varrho_1(y)\, dy = \\ &= \int_0^1 \varrho_{n-1}(x-y)\, dy = \int_{x-1}^{x} \varrho_{n-1}(u)\, du. \end{aligned}$$

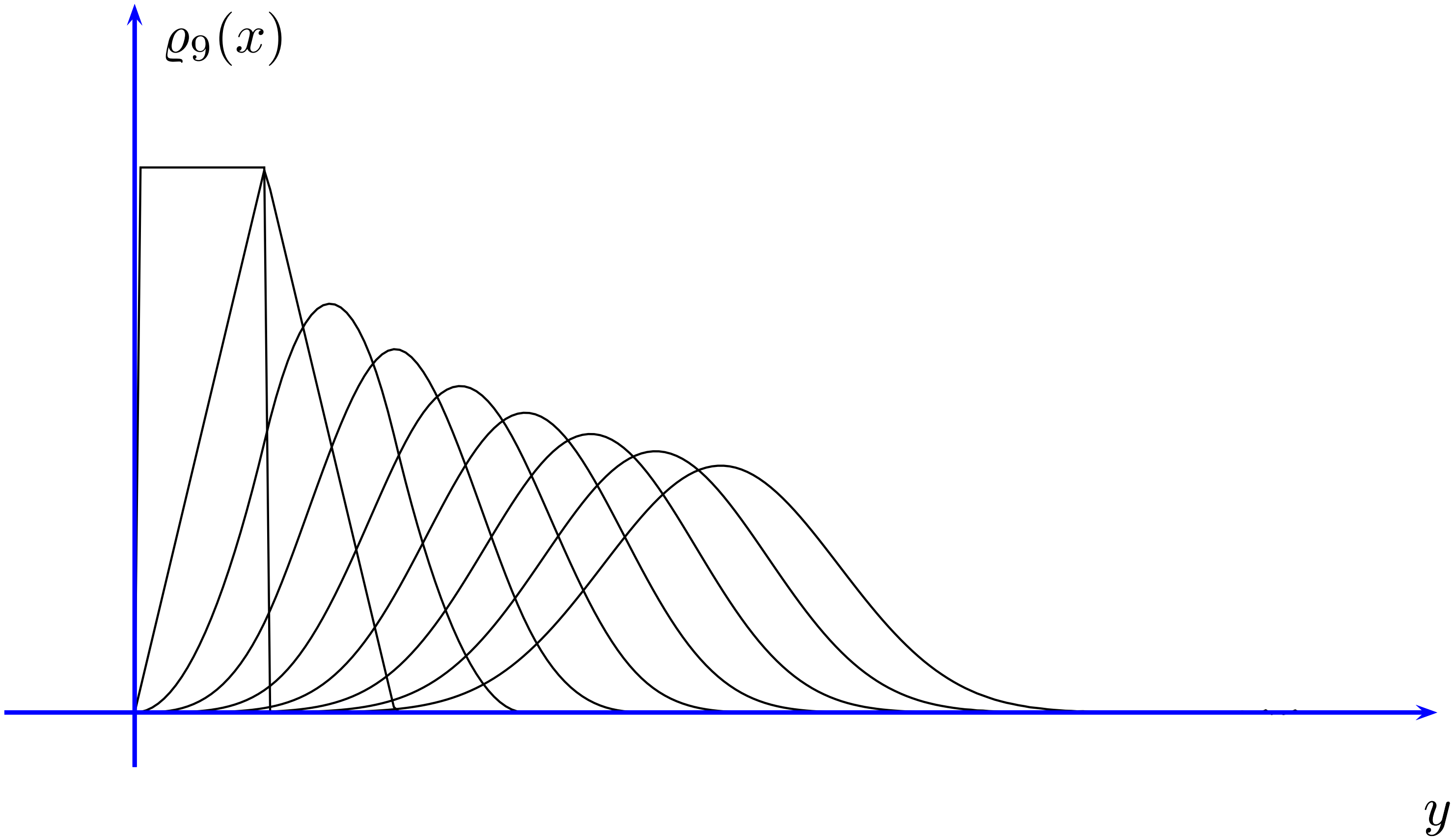
Teljes indukcióval megmutatható, hogy

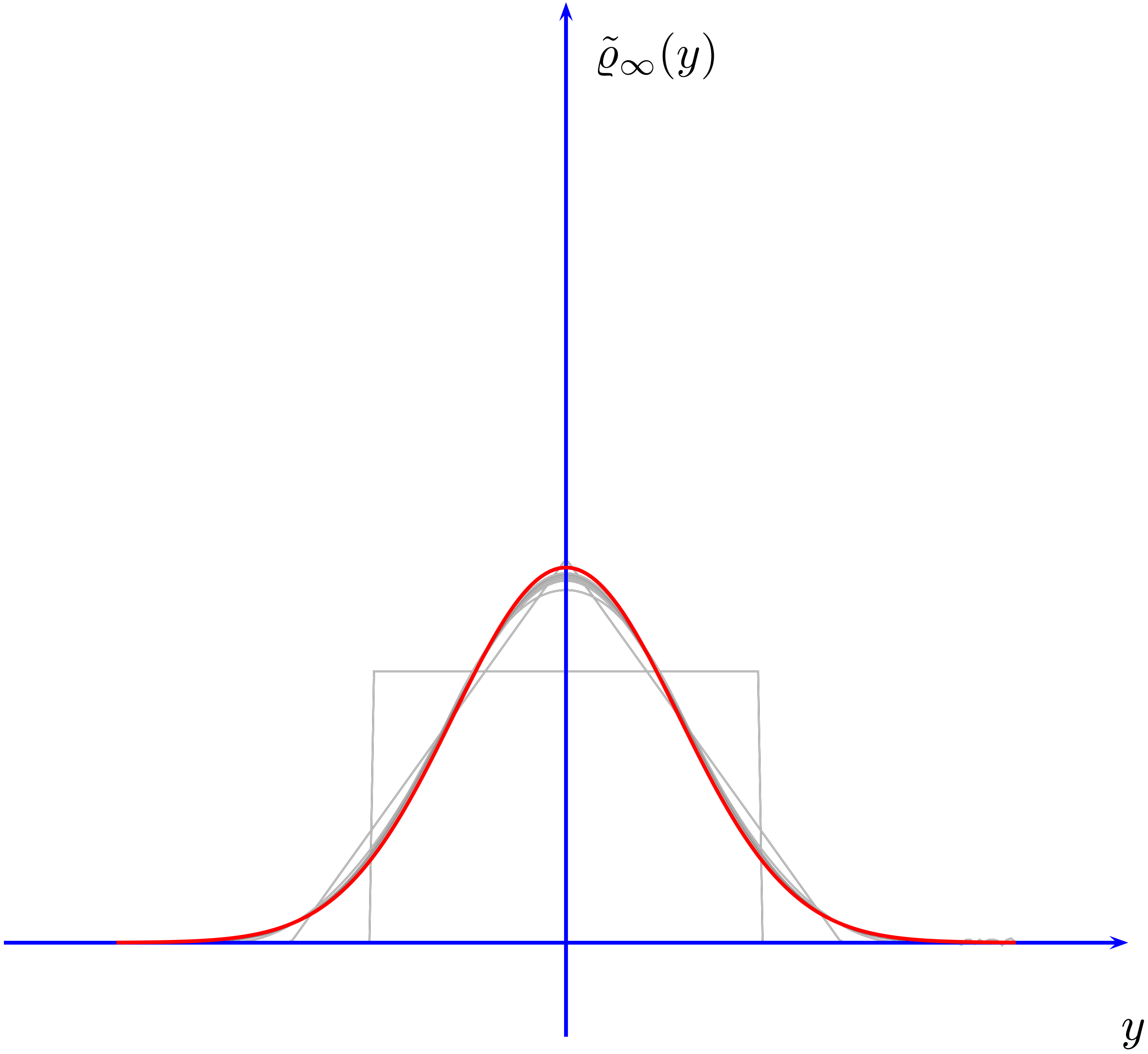
$$\varrho_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{i=0}^{\lfloor x \rfloor} (-1)^i \binom{n}{i} (x-i)^{n-1} \qquad 0 < x < n.$$

$$\zeta_n = \frac{\eta_n - n/2}{\sqrt{n/12}} \qquad \begin{array}{l} \langle \zeta_n \rangle = 0 \\ \sigma_{\zeta_n} = 1 \end{array}$$

$$\tilde{\varrho}_n(y) = \sqrt{n/12}\,\varrho_n\left(\sqrt{n/12}\,y + n/2\right) \qquad -\sqrt{3n} \leqslant y \leqslant \sqrt{3n}$$

Ahol ζ_n normált, centrált valószínűségi változó.





$\tilde{\varrho}_\infty(y)$
y

$$p_1(x_1)\,dx_1 = \varrho(\xi_1)\,d\xi_1 \qquad p_1(x_1) = \varrho\left(\langle\xi\rangle + \sqrt{n}\sigma x_1\right)\tfrac{d\xi_1}{dx_1}$$

$$dx_1 = \tfrac{d\xi_1}{\sqrt{n}\sigma} \qquad p_1(x_1) = \varrho\left(\langle\xi\rangle + \sqrt{n}\sigma x_1\right)\sqrt{n}\sigma$$

$$\begin{aligned}
\varphi_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} & e^{ix_1 t} p_1(x_1)\,dx_1 = \\
&= \sqrt{n}\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + ix_1 t - \frac{x_1^2 t^2}{2} - i\frac{x_1^2 t^3}{6} + \cdots\right) p_1(x_1)\,dx_1 = \\
&= \sqrt{n}\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} \varrho\left(\langle\xi\rangle + \sqrt{n}\sigma x_1\right)\,dx_1 + \\
&+ \sqrt{n}\sigma i t \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 \varrho\left(\langle\xi\rangle + \sqrt{n}\sigma x_1\right)\,dx_1 - \\
&- \sqrt{n}\sigma \frac{t^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^2 \varrho\left(\langle\xi\rangle + \sqrt{n}\sigma x_1\right)\,dx_1 \\
&- \sqrt{n}\sigma i \frac{t^3}{6} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^3 \varrho\left(\langle\xi\rangle + \sqrt{n}\sigma x_1\right)\,dx_1 + \ldots
\end{aligned}$$

$$\sqrt{n}\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} \varrho\left(\langle\xi\rangle + \sqrt{n}\sigma x_1\right)\, dx_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varrho(\langle\xi\rangle + y)\, dy = 1$$

$$\sqrt{n}\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} \varrho\left(\langle\xi\rangle + \sqrt{n}\sigma x_1\right) x_1\, dx_1 = \frac{1}{\sqrt{n}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \varrho(y)\left(y - \langle\xi\rangle\right)\, dy = 0$$

$$\sqrt{n}\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} \varrho\left(\langle\xi\rangle + \sqrt{n}\sigma x_1\right) x_1^2\, dx_1 = \frac{1}{n\sigma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varrho(y)\left(y - \langle\xi\rangle\right)^2\, dy = \frac{1}{n}$$

$$\sqrt{n}\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} \varrho\left(\langle\xi\rangle + \sqrt{n}\sigma x_1\right) x_1^3\, dx_1 = \frac{1}{n^{3/2}\sigma^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \varrho(y)\left(y - \langle\xi\rangle\right)^3\, dy = \frac{\mu_3}{n^{3/2}\sigma^3}$$

$$\sqrt{n}\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} \varrho\left(\langle\xi\rangle + \sqrt{n}\sigma x_1\right) x_1^m\, dx_1 = \frac{1}{n^{m/2}\sigma^m}\mu_m$$

$$\varphi_1(t) = 1 - \frac{t^2}{2n} - \frac{it^3\mu_3}{6n^{3/2}\sigma^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{t^2}{2n} - \frac{it^3\mu_3}{6n^{3/2}\sigma^3} + \mathcal{O}\left(\frac{t^4}{n^2}\right)\right)$$

$$\varphi_n(t) = \varphi_1^n(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2} - \frac{it^3\mu_3}{6n^{1/2}\sigma^3} + \mathcal{O}\left(\frac{t^4}{n}\right)\right)$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}}$$

$$\varrho_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(t-ix)^2-\frac{x^2}{2}}\,dt$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \varrho_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}}$$

A központi határeloszlás-tétel alkalmazása

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n-n\langle\xi\rangle}{\sigma\sqrt{n}}<x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}\,du$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n-n\langle\xi\rangle}{\sigma\sqrt{n}}\right|<\lambda\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\lambda}^{\lambda}e^{-\frac{u^2}{2}}\,du$$

$$P\left(\left|\frac{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n-n\langle\xi\rangle}{\sigma\sqrt{n}}\right|<\lambda\right)\approx 2\Phi(\lambda)-1$$

$$P\left(\left|\frac{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n}{n}-\langle\xi\rangle\right|<\underbrace{\lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{\epsilon}\right)\approx\underbrace{2\Phi(\lambda)-1}_{1-p_0}$$

$$1-p_0=2\Phi(\lambda)-1$$

$$\boxed{n\geqslant\lambda^2\frac{\sigma^2}{\epsilon^2}}$$

Pénzfeldobás

$$\xi = \begin{cases} 1, & \text{fej} \\ 0, & \text{írás} \end{cases} \qquad \longrightarrow \qquad \begin{aligned} \langle \xi \rangle &= \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2} \\ \sigma &= \sqrt{p(1-p)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$P\left(\left| \frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{10}}{10} - \frac{1}{2} \right| < \frac{\lambda}{2\sqrt{10}} \right) \approx 2\Phi(\lambda) - 1$$

$$1 - p_0 = 2\Phi(\lambda) - 1 \qquad\qquad 0.15\lambda$$

$$1\% \quad 1 - p_0 = 0.99 \qquad \left.\begin{aligned} 2\Phi(\lambda) &= 1.99 \\ \Phi(\lambda) &= 0.995 \\ \lambda &\approx 2.57 \end{aligned}\right\} 0.15\lambda = 0.38$$

$$10\% \quad 1 - p_0 = 0.9 \qquad \left.\begin{aligned} 2\Phi(\lambda) &= 1.9 \\ \Phi(\lambda) &= 0.95 \\ \lambda &\approx 1.65 \end{aligned}\right\} 0.15\lambda = 0.24$$

Csebisev $\quad p_0 = \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \longrightarrow \epsilon = \frac{\sigma}{\sqrt{np_0}}$

$$\epsilon_{1\%} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{10 \cdot 0.01}} \approx 1.58$$

$$\epsilon_{10\%} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{10 \cdot 0.1}} = 0.5$$

Központi határeloszlás-tétel II.

(ha nincs σ^2)

Probléma: $$\int_{-\infty}^{+\infty} \varrho(y)\,(y-\langle y\rangle)^2\,dy=\infty$$

Pl.: Cauchy $$\frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2+x^2}$$

$$\boxed{\varrho(x)\sim\frac{1}{|x|^\nu}} \qquad x\to\pm\infty$$

$$\xi=x-\langle x\rangle \qquad \longrightarrow \qquad \varrho(\xi)\approx\frac{C_0}{|\xi|^\nu} \qquad \xi\to\pm\infty$$

$$\varphi_1(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\xi}\varrho(\xi)\,d\xi=1-\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^2\xi^2}{2}\varrho(\xi)\,d\xi}_{\substack{+\infty\\ \text{Elakadtunk!}}}+\dots$$

$$\varphi_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\xi} \varrho(\xi)\, d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + e^{it\xi} - 1\right) \varrho(\xi)\, d\xi =$$

$$= 1 + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{it\xi} - 1\right) \varrho(\xi)\, d\xi$$

$$\varphi_1(t) = 1 + \int_{-\infty}^{+\infty} (\cos(t\xi) - 1)\, \varrho(\xi)\, d\xi + i \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(it\xi) \varrho(\xi)\, d\xi$$

Képzetes rész

$$\operatorname{Im} \varphi_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(t\xi) \varrho(\xi)\, d\xi \overset{t \to 0}{\approx} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(y) \frac{|t|^{\nu-1}}{|y|^{\nu}}\, dy \approx 0$$

páratlan

Valós rész: $\quad |t|\xi = y$ helyettesítéssel

$$\mathrm{Re}\,\varphi_1(t) = 1 + \int_{-\infty}^{+\infty} (\cos y - 1)\,\varrho\left(y/|t|\right)\,dy/|t| \overset{t\to 0}{\approx}$$

$$\approx 1 + \int_{-\infty}^{+\infty} (\cos y - 1)\,\frac{|t|^{\nu-1}}{|y|^{\nu}} C_0\,dy + \ldots \approx$$

$$\approx 1 - |t|^{\nu-1} 2C_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sin^2(y/2)/|y|^{\nu}\right)\,dy + \ldots$$

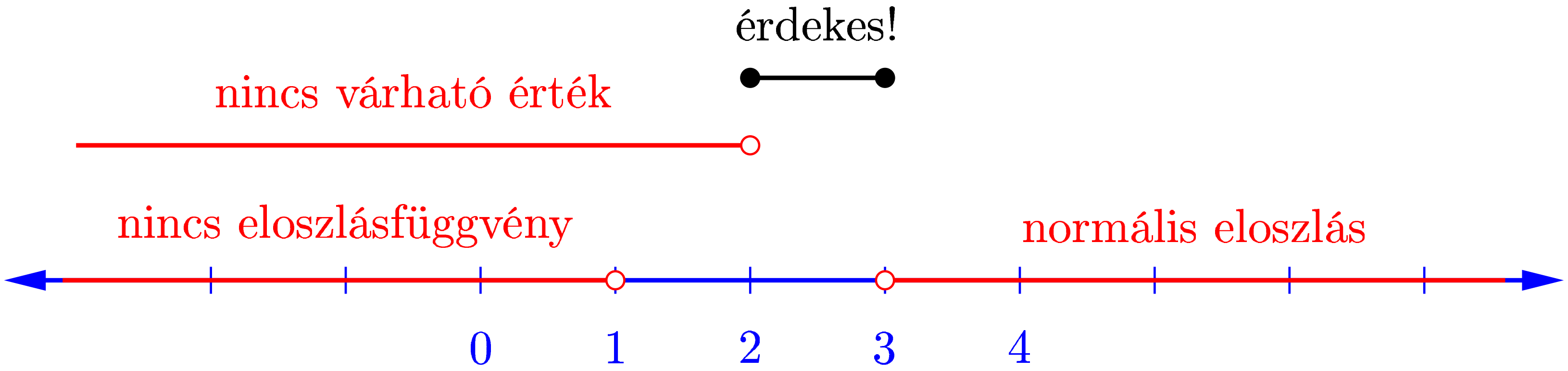
$$\lim_{y\to+\infty} \sin^2(y/2)/|y|^{\nu} = \frac{1}{y^{\nu}} \qquad \text{integrálható, ha } \nu > 1,$$

$$\lim_{y\to 0} \sin^2(y/2)/|y|^{\nu} = \frac{1}{y^{\nu-2}} \qquad \text{integrálható, ha } \nu < 3,$$

De ha $\nu > 3$ akkor létezik σ^2,

ha $\nu < 1$ akkor nem normálható az elos

és ha $\nu < 2$ akkor nem létezik a várható érték.



$$\varphi_1(t) \overset{t\to 0}{\approx} 1 - |t|^{\nu-1} \cdot C + \{t\text{-ben magasabb rendű tagok}\}$$

$$\begin{array}{l} \mu = \nu - 1 \\ 1 < \mu < 2 \end{array} \qquad \varrho(\xi) \approx \frac{C_0}{\xi^\nu} \qquad C = 4C_0 \int_0^\infty \frac{\sin^2(y/2)}{y^\nu}\, dy$$

$$x_i = \frac{1}{n^\alpha}\left(\xi_i - \langle \xi \rangle\right)$$

$$x = \sum_{i=0}^{n} x_i = \frac{1}{n^\alpha}\left(\sum_{i=0}^{n} \xi_i - n \langle \xi \rangle\right)$$

$$p_1(x_1) = n^\alpha \varrho\left(\langle \xi \rangle + n^\alpha x_1\right)$$

$$\varphi_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix_1 t} n^\alpha \varrho\left(\langle \xi \rangle + n^\alpha x_1\right) dx_1 =$$

$n^\alpha x_1 = y$

jelöléssel

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iyt/n^\alpha} n^\alpha \varrho\left(\langle \xi \rangle + y\right) dy \overset{t \to t/n^\alpha}{\approx} 1 - C\frac{|t|^\mu}{n^{\alpha\mu}} + \dots$$

$$\varphi_n(t) = \varphi_1^n(t)$$

$$\varphi_1(t) \approx \exp\left(-C\frac{|t|^\mu}{n^{\alpha\mu}} + \dots\right)$$

$$\varphi_n(t) \approx \exp\left(-C\frac{|t|^\mu}{n^{\alpha\mu-1}} + \dots\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \alpha\mu > 1 \\ 0, & \text{ha } \alpha\mu < 1 \\ \exp\left(-C|t|^\mu\right), & \text{ha } \alpha\mu = 1 \end{cases}$$

$\boxed{\varphi_n(t) = \exp\left(-C|t|^\mu\right)}$ n-től függetlenül, $\alpha = 1/\mu$

$$x = \frac{1}{n^{1/\mu}} \left(\sum_{i=0}^{n} \xi_i - n \langle \xi \rangle \right)$$

$$\varrho(\xi) \to \frac{C_0}{\xi^{\mu+1}} \qquad C = 4C_0 \int_0^\infty \frac{\sin^2(y/2)}{y^{\mu+1}}\, dy$$

$$\lim_{n\to\infty} \varrho_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} e^{-C|t|^n}\, dt$$

$$\boxed{\varrho_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos(tx) e^{-C|t|^\mu}\, dt}$$

A Lévy-eloszlások stabil eloszlások $\qquad 1 \leqslant \mu \leqslant 2$

Pl. $\mu = 1$ Cauchy:

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{a^2+x^2} e^{itx}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} e^{itxa}\,dx$$

$$\varphi_1(t) = e^{-a|t|}$$

$$\varphi_n(t) = \varphi_1^n(t) = e^{-an|t|}$$

$$\varrho_n(x) = \frac{1}{\pi}\frac{na}{n^2a^2+x^2} = \frac{1}{n}\frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2+(x/n)^2} = \frac{1}{n}\varrho_1(x/n)$$

Pl. $\mu = 2$ Gauss:

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} e^{-x^2/2\sigma^2}\, dx$$

$$\varphi_1(t) = e^{-\sigma^2 t^2/2}$$

$$\varphi_n(t) = e^{-\sigma^2 n t^2/2}$$

$$\varrho_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma\sqrt{n}} e^{-\frac{x^2}{2n\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \varrho_1\left(x/\sqrt{n}\right)$$

$$L_\mu(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos(xt)e^{-C|t|^\mu}\,dt$$

$$\varphi_\mu(t) = e^{-C|t|^\mu}$$

$$\varphi_\mu^n(t) = e^{-Cn|t|^\mu}$$

$$L_\mu^{(n)}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos(xt)e^{-Cn|t|^\mu}\,dt$$

${t'}^\mu = nt^\mu$ jelöléssel

$$L_\mu^{(n)}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos(xt'/n^{1/\mu})e^{-Cn\left|t'\right|^\mu}\frac{dt'}{n^{1/\mu}}$$

$$L_\mu^{(n)}(x) = \frac{1}{n^{1/\mu}}L_\mu^{(1)}\left(\frac{x}{n^{1/\mu}}\right)$$

A nagy eltérések tétele

Milyen a legnagyobb földrengések, áradások, tőzsdei fluktuációk eloszlása?

Legyenek függetlenek az események $\varrho(x)$ sűrűségfüggvénnyel, és legyen $x \geqslant 0$.

Tekintsünk N darab eseményt: $x_1, x_2, \ldots, x_N$-t. Milyen lesz a legnagyobb eloszlása?

$$x = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$$

$N = 1$ $$P(x_1 < x) = \int_{-\infty}^{x} \varrho(y)\, dy = F(x)$$

$N = 2$ $$P(x_1, x_2 < x) = P(x_1 < x) P(x_2 < x) = F^2(x)$$

N $$P(x_1, x_2, \ldots, x_N < x) = P(x_1 < x) \cdots P(x_N < x) = F^N(x)$$

A legnagyobb érték eloszlása:

$$\varrho_N(x) = \frac{d}{dx} F^N(x) = N F^{N-1}(x)\varrho(x)$$

Milyen lesz ez az eloszlás nagy N esetén?

Tegyük fel, hogy az eloszlásnak van valamilyen asszimptotikus alakja. $\Rightarrow$ Eltolás és átalakítás után megegyezik az eredetivel:

$$\boxed{F^N(x) = F(a_N x + b_N)}$$

Vegyük az $x^* = a_N x^* + b_N$ pontot: $x^* = \dfrac{b_N}{1 - a_N}$

$$F^N(x^*) = F(a_N x^* + b_N) = F(x^*)$$

$$F^{N-1}(x^*)\left(F(x^*) - 1\right) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \left.\begin{array}{l} F(x^*) = 0 \\ F(x^*) = 1 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{c} \text{Egyik megoldás sem értelmes,} \\ \text{hacsak nem } x^* = 0 \text{ vagy } x^* = \infty \end{array}$$

$x^* = \infty$, $F(\infty) = 1$ eset: $\quad \Rightarrow \quad a_N = 1,\ b_N \neq 0$

$$F^N(x) = F(x + b_N)$$

$$N \ln F(x) = \ln F(x + b_N)$$

$$\ln N + \underbrace{\ln(-\ln F(x))}_{\Psi(x)} = \ln(-\ln F(x + b_N))$$

$$\ln N + \Psi(x) = \Psi(x + b_N)$$

$$\ln N + \ln N + \Psi(x) = \Psi(x + b_{N^2})$$

$$\ln N + \Psi(x + b_N) = \Psi(x + b_{N^2})$$

$$\Psi(x + b_N + b_N) = \Psi(x + b_{N^2})$$

$$2b_N = b_{N^2}$$

$$k\, b_N = b_{N^k}$$

$$\boxed{b_N = \alpha \ln N}$$

$$\ln N + \Psi(x) = \Psi(x + \alpha \ln N)$$

$$\boxed{\Psi(x) = \frac{x}{\alpha} + \beta}$$

$$-\ln F(x) = e^{\Phi(x)} = e^{\frac{x}{\alpha}+\beta} \qquad \Rightarrow \qquad \ln F(x) = -e^{\frac{x}{\alpha}+\beta}$$

$$F(x) = \exp\left(-e^{\frac{x}{\alpha}+\beta}\right) \equiv \exp\left(-\lambda_2 e^{-\lambda_1 x}\right) \qquad \left(\lim_{x\to\infty} F(x) = 1\right)$$

$$\varrho(x) = F'(x) = \exp\left(-\lambda_2 e^{-\lambda_1 x}\right) \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_1 x} =$$

$$= \exp\left(-\lambda_1 x - \lambda_2 e^{-\lambda_1 x}\right) \lambda_1 \lambda_2$$

$$F^N(x) = \exp\left(-N\lambda_2 e^{-\lambda_1 x}\right) =$$

$$= \exp\left[-\lambda_2 e^{-\lambda_1\left(x - \frac{\ln N}{\lambda_1}\right)}\right] = F\left(x - \ln N/\lambda_1\right)$$

$$\lambda_2 \to N\lambda_2$$

Legvalószínűbb pont: x^*

$$\varrho'(x^*) = 0 \qquad -\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_1 x^*} = 0$$

$$\frac{d}{dx}\log\varrho(x^*) = 0 \qquad e^{-\lambda_1 x^*} = 1/\lambda_2$$

$$-\lambda_1 x^* = -\ln\lambda_2$$

$$x^* = \frac{\ln\lambda_2}{\lambda_1}$$

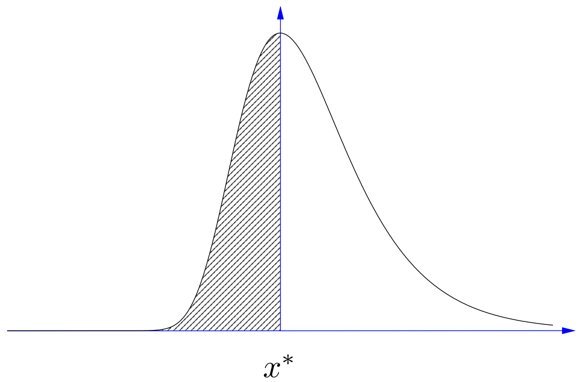
Illetve $x^*_N = (\ln N\lambda_2)/\lambda_1$.
Legyen $x = x^*_N + y$.

$$\varrho(y) = \exp\left(-\lambda_1 y - e^{-\lambda_1 y}\right)$$

$$F^N(x) = \exp\left(-N\lambda_2 e^{-\lambda_1(x^*_N+y)}\right) =$$

$$= \exp\left(-N\lambda_2 e^{-\lambda_1 y - \ln(N\lambda_2)}\right) =$$

$$= \exp\left(-e^{-\lambda_1 y}\right) \qquad N \text{ független!}$$



$p = 1/e$

Az $x^* = 0,\ F(0) = 0$ eset: $\quad b_N = 0$

$$\boxed{F^N(x) = F(a_N x)}$$

$$N \underbrace{\ln F(x)}_{\Psi(x)} = \ln F(a_N x)$$

$$N\Psi(x) = \Psi(a_N x)$$

$$N^2\Psi(x) = \Psi(a_{N^2} x)$$

$$N^2\Psi(x) = N\Psi(a_N x) = \Psi(a_N^2 x)$$

$$a_{N^k} = a_N^k \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_N = N^\alpha} \qquad a_1 = 1$$

$$N\Psi(x) = \Psi\left(N^\alpha x\right)$$

$$\Psi(x) = \beta \cdot x^{1/\alpha}$$

$$F(x) = \exp\left(\beta x^{1/\alpha}\right) \qquad \left(\lim_{x\to\infty} F(x) = 1\right)$$

$$F(x) = \exp\left(-\lambda_1/x^{\lambda_2}\right) \qquad \lambda_1, \lambda_2 > 0$$

$$F^N(x) = \exp\left(-N\lambda_1/x^{\lambda_2}\right) = \exp\left(-\frac{\lambda_1}{\left(x/N^{1/\lambda_2}\right)^{\lambda_2}}\right) = F\left(xN^{-1/\lambda_2}\right)$$

$$\varrho(x) = \exp\left(-\lambda_1/x^{\lambda_2}\right)\lambda_1\lambda_2/x^{\lambda_2+1}$$

Maximum?

$$\frac{d}{dx}\log\varrho(x) = \frac{d}{dx}\left(-\lambda_1/x^{\lambda_2} - (\lambda_2+1)\log x\right) =$$

$$= \lambda_1\lambda_2/x^{\lambda_2+1} - (\lambda_2+1)/x = 0$$

$$\frac{\lambda_1\lambda_2}{x^{\lambda_2}} - \lambda_2 - 1 = 0$$

$$\frac{1}{x^{\lambda_2}} = \frac{\lambda_2+1}{\lambda_1\lambda_2}$$

$$x^* = \left(\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2+1}\right)^{1/\lambda_2}$$

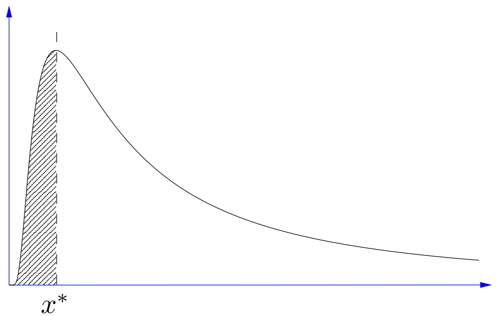
Legyen $x = yx^*$:

$$F^N(x) = F(yx^*) = \exp\left(-N\lambda_1 / (yx^*)^{\lambda_2}\right) =$$

$$= \exp\left[-N\lambda_1 \frac{1}{y^{\lambda_2}\left(\frac{N\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2+1}\right)}\right] = \exp\left[-\left(1+\frac{1}{\lambda_2}\right)\frac{1}{y^{\lambda_2}}\right]$$

N-től független!

$$\boxed{\varrho_N(y) = \exp\left[-\left(1+\frac{1}{\lambda_2}\right)\frac{1}{y^{\lambda_2}}\right]\frac{\lambda_2+1}{y^{\lambda_2+1}}}$$



$$p = e^{-1-1/\lambda_2}$$

Eloszlások asszimptotikus viselkedése $\quad y \to \infty$

$$\varrho_N(y) \approx e^{-\lambda_1 y} \qquad \text{exponenciális farok}$$

$$\varrho_N(y) \approx \frac{\lambda_1 + 1}{y^{\lambda_1+1}} \qquad \text{„nehéz" farok (heavy-tailed distribution)}$$

Univerzalitás

I.	exponenciális farok	Gauss centrális határeloszlás
II.	hatvány farok	Lévy centrális határeloszlás

A statisztika elemei

Az eddigiek megfordítása: az adatokból a valószínűségekre és az eloszlás tulajdonságaira visszakövetkeztetni.

Statisztikai sokaság:

a vizsgált egyedek és a hozzájuk rendelt számértékek összessége.

Pl.: Carlsberg sörösüvegek (a kvantummechanika szempontjából jelentős) $\not\leftrightarrow$ betöltött nedü pontos mennyisége $\sim$ 33cl

A statisztikai sokaság eloszlása:

legyen N eleme a sokaságnak, válasszunk ki egyet. Ennek valószínűsége $1/N$.

$\Rightarrow$ Az egyedek illetve azok A részhalmazaihoz $P(A) = k/N$ valószínűségeket rendelünk.

$\Rightarrow$ Valószínűségi mezővé alakul a sokaság.

A mintavétel: A sokaság n elemét kiválasztjuk $x_1, x_2, \ldots, x_n$ visszatevéssel, vagy visszatevés nélkül.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ függetlenek, ha

- visszatevéssel választottuk ki,
- visszatevés nélkül, de a sokaság gyakorlatilag végtelen.

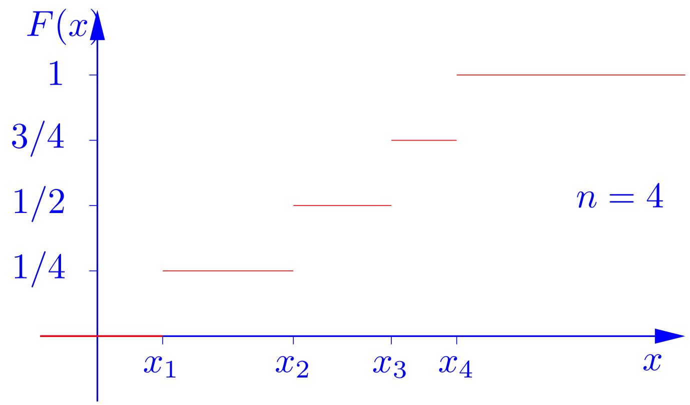
Statisztikai következtetés:

- a mintából következtetünk valamire valamilyen valószínűséggel pl.: valamit 95% valószínűséggel állítunk, akkor 100-ból átlagosan 5-ször nem lesz igazunk
- minél nagyobb valószínűséggel állítunk valamit, annál kevésbé értékes az állítás (ugyanazon minta esetén)
- típusa: leírás, analízis, jóslás

A minta eloszlása:

empírikus eloszlásfüggvény

$x_1, x_2, \ldots, x_n$



Empírikus adatok

Empírikus várható érték: $\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \bar{x}$

Empírikus szórásnégyzet: $\frac{1}{n}\left((x_1 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2\right) = S^2$

Empírikus k-ik momentum: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k$

empírikus $\longleftrightarrow$ elméleti (adott, ismert eloszlásból származó)

statisztika $\longleftrightarrow$ valószínűségszámítás

Az empírikus és elméleti adatok kapcsolata

$n \to \infty$ esetén az empírikus adatok $\longrightarrow$ elméleti adatokhoz (nagy számok törvényének átfogalmazása)

De fontos:

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\,; \qquad \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\left\langle S^2 \right\rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\left\langle x_i^2 \right\rangle - 2\left\langle x_i \bar{x} \right\rangle + \left\langle \bar{x}^2 \right\rangle\right]$$

$$\left\langle \bar{x}^2 \right\rangle = \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n}\left\langle x_i^2 \right\rangle + 2\sum_{\substack{i,j\\ i>j}}\left\langle x_i x_j \right\rangle\right] =$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[n\left\langle x^2 \right\rangle + 2\frac{n(n-1)}{2}\left\langle x \right\rangle^2\right] = \frac{1}{n}\left\langle x^2 \right\rangle + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left\langle x \right\rangle^2$$

$$\langle x_i \bar{x} \rangle = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \langle x_i x_k \rangle = \frac{1}{n} \left[(n-1) \langle x \rangle^2 + \langle x^2 \rangle \right]$$

$$\langle S^2 \rangle = \frac{1}{n} \left[n \langle x^2 \rangle - 2(n-1) \langle x \rangle^2 - 2 \langle x^2 \rangle + \langle x^2 \rangle + (n-1) \langle x \rangle^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{n} \left[(n-1) \langle x^2 \rangle - (n-1) \langle x \rangle^2 \right] = \frac{n-1}{n} \left[\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \right] =$$

$$= \frac{n-1}{n} \sigma^2$$

Korrigált empírikus szórásnégyzet:

$$S^{*2} = \frac{n}{n-1} S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

$$\boxed{\left\langle S^{*2} \right\rangle = \frac{n}{n-1} \langle S^2 \rangle = \sigma^2}$$

Normális eloszlású sokaság $\quad x_i \in \mathcal{N}(m, \sigma)$

$\bar{x}$ eloszlása

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \in \mathcal{N}\left(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

S^2 eloszlása

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{2}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j + \frac{1}{n^2}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^2 =$$

$$= \frac{n-1}{n}\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{2}{n^2}\sum_{i<j} x_i x_j$$

Bevezetve az

$$x_i = m + \sigma z_i, \qquad z_i \in \mathcal{N}(0,1)$$

jelölést:

$$S^2 = \frac{n-1}{n}\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(m^2 + 2\sigma m z_i + \sigma^2 z_i^2\right) -$$

$$-\frac{2}{n^2}\sum_{i<j}\left(m^2 + 2\sigma m z_i + 2\sigma m z_j + \sigma^2 z_i z_j\right) =$$

$$= \sigma^2\frac{n-1}{n}\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i^2 - \sigma^2\frac{2}{n^2}\sum_{i<j} z_i z_j$$

Vezessük be az $y = \dfrac{nS^2}{\sigma^2}$ változót:

$$y = \frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i^2 - \frac{2}{n}\sum_{i<j} z_i z_j$$

$$p(y) = \int \cdots \int dz_1 \, dz_n \, \delta\left(y - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sum_{i=1}^{n} z_i^2 + \frac{2}{n} \sum_{i<j} z_i z_j \right) \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z_1^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z_2^2/2} \cdots \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z_n^2/2}$$

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(y) e^{ity} \, dy =$$

$$= \int \frac{d^n z}{(2\pi)^{n/2}} e^{it\left(1-\frac{1}{n}\right) \sum\limits_{i=1}^{n} z_i^2 - 2\frac{it}{n} \sum\limits_{i<j} z_i z_j - \frac{1}{2} \sum\limits_{i=1}^{n} z_i^2} =$$

$$= \int \frac{d^n z}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\underline{z}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{z}} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \sqrt{\frac{\pi^n}{\det \underline{\underline{A}}}}$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - it\left(1 - \frac{1}{n}\right) & \frac{it}{n} & \frac{it}{n} & \dots \\ \frac{it}{n} & \frac{1}{2} - it\left(1 - \frac{1}{n}\right) & \frac{it}{n} & \dots \\ \frac{it}{n} & \frac{it}{n} & \frac{1}{2} - it\left(1 - \frac{1}{n}\right) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\det \underline{\underline{A}} = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i; \qquad \lambda_i \underline{v}^{(i)} = \underline{\underline{A}}\,\underline{v}^{(i)}$$

$$\underline{\underline{A}} = \left(\frac{1}{2} - it\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{4} \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} + \frac{it}{n} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \hdotsfor{4} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Tetszőleges $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ esetén:

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{v} = \left(\frac{1}{2} - it\right)\underline{v} + \frac{it}{n}\sum_{i=1}^{n} v_i \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sajátvektorok:

1. $\sum_{i=1}^{n} v_i^{(k)} = 0$ feltétel mellett $\underline{v}^{(k)}$ tetszőleges. Ez egy $(n-1)$ dimenziós altér, $(n-1)$ darab $\lambda = \left(\frac{1}{2} - it\right)$ sajátértékkel.

2. $\sum_{i=1}^{n} v_i^{(k)} \neq 0$ esetén $\underline{v}^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, a sajátérték:

   $\lambda = \frac{1}{2} - it + it = \frac{1}{2}$.

$$\det \underline{\underline{A}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - it \right)^{n-1}$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{(1 - i2t)^{\frac{n-1}{2}}} \quad \Longrightarrow \quad \chi^2\text{-eloszlás } n-1 \text{ szabadsági fokkal!}$$

$$p(y) = \frac{y^{\frac{n}{2}-\frac{3}{2}} e^{-y/2}}{2^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$$

Statisztikai becslések

Feladat: ismert a statisztikai sokaság eloszlása, de meg kell határozni az eloszlás egy paraméterének konkrét értékét.

$p(x;a)$	pl.:	normális eloszlás	$\longrightarrow$	szórás (σ)
			$\longrightarrow$	várható érték (m)
		Poisson-eloszlás	$\longrightarrow$	λ paraméter

Ismertek az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mintaelemek. Ezekből kell a-ra becslést adnunk $\Rightarrow$ statisztikai függvény vagy statisztika.

$$\hat{a} = \hat{a}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

ez egy valószínűségi változó, függ a értékétől!

Torzítatlan becslés: ha

$$\langle \hat{a} \rangle = a$$

Hatásos becslés: ha $\hat{a}_1$ és $\hat{a}_2$ két torzítatlan becslés, és

$$\sigma^2(\hat{a}_1) < \sigma^2(\hat{a}_2)$$

akkor $\hat{a}_1$ hatásosabb becslés, mint $\hat{a}_2$.

Ha $\hat{a}_0$ olyan, hogy $\sigma^2(\hat{a}_0)$ minimális az összes torzítatlan becslés között, akkor ezt hatásos becslésnek hívjuk.

A várható érték hatásos becslése: $p(x;a)$, a legyen $\langle x \rangle = a$. Ekkor

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \hat{a}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

a hatásos becslés más lineáris becslések közül.

$$\hat{a} = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i; \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i = 1$$

$$\langle \hat{a} \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \langle x_i \rangle = \langle x \rangle = a$$

$$\left\langle \hat{a}^2 \right\rangle = \left\langle \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right)^2 \right\rangle = \left\langle \sum_{i,j} a_i a_j x_i x_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \left\langle x^2 \right\rangle + \sum_{i \neq j} a_i a_j \left\langle x \right\rangle^2$$

Feladat: $\min \left\{ \left\langle \hat{a}^2 \right\rangle - \left\langle \hat{a} \right\rangle^2 \right\}$ meghatározása a $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ mellékfeltétel mellett. Legyen λ egy Lagrange-multiplikátor:

$$\frac{\partial}{\partial a_k} \left[\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \left\langle x^2 \right\rangle + \sum_{i \neq j} a_i a_j \left\langle x \right\rangle^2 - \left\langle x \right\rangle^2 - \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i \right] = 0$$

$$2a_k \left\langle x^2 \right\rangle + 2 \sum_{j \neq k} a_j \left\langle x \right\rangle^2 - \lambda = 0$$

$$2a_k \left\langle x^2 \right\rangle + 2(1 - a_k) \left\langle x^2 \right\rangle = \lambda$$

Látható, hogy k-tól függetlenül $a_k = C(\lambda)$.

$$\sum_{i=1}^{n} a_k = nC(\lambda) = 1 \quad \Rightarrow \quad C(\lambda) = \boxed{a_k = \frac{1}{n}}$$

A szórás torzítatlan becslése: $p(x;a); \qquad a=\sigma^2$

$$\hat{a} = S^{*2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\,; \qquad \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

a szórás torzítatlan becslése.

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \qquad \text{torzított!}$$

Az a paraméter becsléssorozata: $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_n, \ldots$

$$\lim_{n\to\infty}\langle \hat{a}_n\rangle = a$$

Asszimptotikusan torzítatlan becslés: pl. S^2 asszimptotikusan torzítatlan becslése σ^2-nek.

Konzisztens becslés, ha $a_n \to a$

Elégséges becslés: legyen $y = \hat{a}(x_1, \ldots, x_n)$. Ekkor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ feltételes eloszlása ne tartalmazza a-t.

Maximum-likelihood módszer

$p(x;a)$-ban a-t becsüljük az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n elemű minta alapján.

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; a) = p(x_1; a)p(x_2; a) \cdots p(x_n; a)$$

L arányos annak a valószínűségével, hogy éppen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ következik be adott a paraméter mellett.

Keressük meg azt az a-t, ami mellett az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sorozat megfigyelése a legvalószínűbb:

$$\max_a L(\underline{x}; a) \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\partial L}{\partial a}\right|_{\hat{a}(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = 0; \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial a^2} < 0$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{a}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Az $\dfrac{\partial L}{\partial a} = 0$ helyett lehet az $\dfrac{\partial \ln L}{\partial a} = 0$ feltételt is vizsgálni.

Több változó esetén: $\frac{\partial \ln L}{\partial a_1} = 0; \quad \frac{\partial \ln L}{\partial a_2} = 0; \quad \ldots ; \quad \frac{\partial \ln L}{\partial a_r} = 0;$

Pl.: Binomiális eloszlás p paraméterének becslése

$$p(x;a) = \binom{N}{x} a^x (1-a)^{N-x}$$

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; a) = \prod_{i=1}^{n} \binom{N}{x_i} a^{x_i} (1-a)^{N-x_i}$$

$$\ln L = \sum_{i=1}^{n} \left[\ln \binom{N}{x_i} + x_i \ln a + (N - x_i) \ln(1-a) \right]$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{x_i}{a} - \frac{N - x_i}{1-a} \right] = \sum_{i=1}^{n} \frac{(1-a)x_i - a(N - x_i)}{a(1-a)} =$$

$$= \frac{1}{a(1-a)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - aN) = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{a} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{nN}$$

Intervallumbecslés

$$P(\hat{a}_1 \leqslant a \leqslant \hat{a}_2) = 1 - p$$

Olyan $\hat{a}_1$ és $\hat{a}_2$ statisztikák konstruálása, amire a fentiek teljesülnek. Megadja azt az intervallumot, ahova a paraméter nagy valószínűséggel esik.

Konfidencia intervallum:

Legyen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ normális eloszlású σ szórással. Keressük a várható értékre vonatkozó konfidencia intervallumot.

$$u = \frac{\bar{x} - m}{\sigma\sqrt{n}} \in \mathcal{N}(0,1) \qquad (m = \langle x \rangle)$$

$$P(|u| \leqslant u_p) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{u_p} e^{-x^2/2}\, dx = 1 - p$$

Pl.: $p = 0.05$ esetén $u_p = 1.96$

$$\bar{x} - u_p \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant m \leqslant \bar{x} + u_p \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Mekkora mintaszám szükséges, hogy a p-hez tartozó konfidencia intervallum félszélessége d legyen?

$$u_p \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant d \quad \Rightarrow \quad \boxed{n \geqslant u_p^2 \frac{\sigma^2}{d^2}}$$

Konfidencia intervallum $\langle x \rangle$-re ismeretlen σ esetén

$$t = \sqrt{n}\, \frac{\bar{x} - \langle x \rangle}{S^*} = \sqrt{n-1}\, \frac{\bar{x} - \langle x \rangle}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \Bigg/ \frac{\sqrt{n-1}}{\sigma} S^*$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Számláló:} & \mathcal{N}(0,1) \text{ (normális-) eloszlású} \\ \text{Nevező:} & n-1 \text{ szabadsági fokú } \chi^2 \text{ eloszlás} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow t \quad n-1$ szabadsági fokú Student- (t-) eloszlású

$$P(|t| \leqslant t_p) = S_{n-1}(t_p) = 1 - p$$

$(1-p)100\%$-os konfidencia intervallum határai:

$$\bar{x} \pm t_p \frac{S^*}{\sqrt{n}}$$

Pl.: 15db villanyégő élettartamát mérjük

$$\bar{x} = \frac{1}{15}(t_1 + t_2 + \cdots + t_{15}) = 1200\,\text{óra}$$
$$S^* = 186\,\text{óra}$$
$$n - 1 = 14 \quad \text{szabadsági fok}$$

Megbízhatóság 99% $\Rightarrow p = 0.01$

$$\bar{x} - t_{0.01}\frac{S^*}{\sqrt{n}} = 1200 - 2.977\frac{186}{\sqrt{15}} = 1057\,\text{óra}$$
$$\bar{x} + t_{0.01}\frac{S^*}{\sqrt{n}} = 1200 + 2.977\frac{186}{\sqrt{15}} = 1343\,\text{óra}$$

Statisztikai próbák

normális eloszlású sokaságok esetén

u-próba: σ adott

Hipotézis: a sokaság várható értéke m_0

$$u = \sqrt{n}\,\frac{\bar{x} - m_0}{\sigma} \in \mathcal{N}(0, 1)$$

$$P(|u| > u_p) = p$$

Ha p kicsi, akkor $|u| \leqslant u_p$ majdnem biztos.

$\langle x \rangle$ és m_0 között szignifikáns az eltérés $(1 - p_0)100\%$-os szinten.

t-próba: σ és $\langle x \rangle$ ismeretlen

Hipotézis: a sokaság várható értéke m_0

$$t = \sqrt{n}\,\frac{\bar{x} - m_0}{S^*}$$

$$P(|t| > t_p) = p \qquad \text{Student-eloszlás táblázatából}$$

Pl.: Hipotézis: a sörösüvegben talált sör várható értéke 33cl=100%

Mért értékek:

98.5%	100.3%
99.6%	99.4%
100.2%	98.7%
99.3%	99.1%
100.4%	98.5%

$$\bar{x} = 99.4\%$$

$$n = 10$$

$$\frac{S^*}{\sqrt{n}} = 0.2285\%$$

$$t = \sqrt{n}\,\frac{\bar{x} - 100\%}{S^*} = -2.63$$

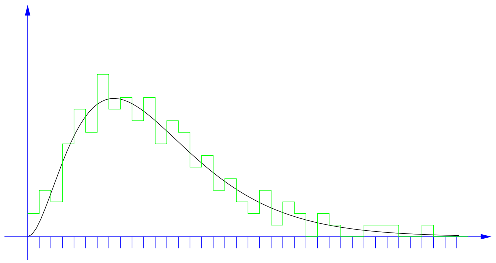
$t_{0.05} = 2.262$ 95%-os szinten nem szignifikáns

$t_{0.01} = 3.250$ 95%-os szinten szignifikáns

A χ^2-próba

Az egész eloszlásfüggvény tesztelésére alkalmas

Boxok	*Valószínűségek*	*Gyakoriságok*
0	p_0	ν_0
1	p_1	ν_1
2	p_2	ν_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
r	p_r	ν_r
	$\sum_{i=0}^{n} p_i = 1$	$\sum_{i=0}^{r} \nu_i = n$



$$\sum_{i=0}^{r} (\nu_i - np_i)^2 \quad \rightarrow \quad \chi^2 = \sum_{i=0}^{r} \frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i}$$

Binomiális eloszlás a boxokban

$$z_i = \frac{\nu_i - np_i}{\sqrt{np_i}}$$

$n \to \infty$ esetén asszimptotikusan 0 várható értékű, $1 - p_i$ szórásnégyzetű, normális eloszlású valószínűségi változó

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^{r} z_i^2$$

$$\sum_{i=0}^{r} \sqrt{p_i} z_i = 0 \qquad \text{(nem függetlenek)}$$

χ^2 asszimptotikusan r szabadsági fokú χ^2 eloszlás

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\chi^2 < x\right) = K_r(x)$$

$$p = 1 - K_r\left(\chi_p^2\right) \approx P\left(\chi^2 > \chi_p^2\right)$$

($np_i \geqslant 10$ kell kb.)

A Mendel story

Gregor Mendel (1822–1884)

Sárga (y) és zöld (g) borsószemek

$$\underbrace{yy, yg, gy}_{\text{sárga}}, \underbrace{gg}_{\text{zöld}}$$

$$yy \quad gg$$

$$\searrow \swarrow$$

$$\boxed{yg, gy}$$

$$\swarrow \searrow$$

$$\underbrace{yy, yg, gy}_{75\%}, \underbrace{gg}_{25\%}$$

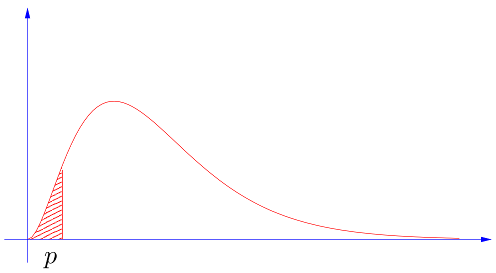
84 kísérlet 1 szabadsági fok.

Minden kísérletre adódik egy χ^2 érték

$$\chi^2 = \frac{\left(\frac{k_y}{n} - p_y\right)^2}{p_y} + \frac{\left(\frac{k_g}{n} - p_g\right)^2}{p_g}$$

Független kísérletek esetén χ^2 összeadódik: $\sum_{i=1}^{84} \chi_i^2 \approx 42$

szabadsági fok 84



100.000 esetből 4X

$p \approx 4 \cdot 10^{-5}$

R. A. Fisher (1965)

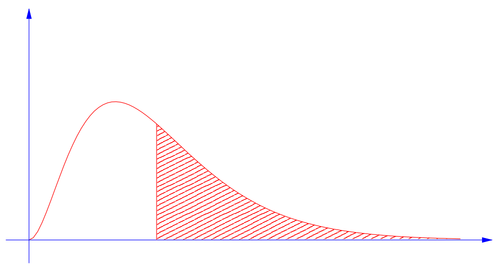
Becsléses illeszkedésvizsgálat

$$p_i = p_i(a_1, a_2, \ldots, a_s)$$

$\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_s$ maximum Likelihood becslései a paramétereknek

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{\left[k_i - np_i(\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_s)\right]^2}{np_i(\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_s)}$$

$r - s - 1$ szabadsági fokú χ^2 eloszlást ad



Függetlenségvizsgálat

$$\begin{matrix} A_1, A_2, \ldots, A_r \\ B_1, B_2, \ldots, B_s \end{matrix} \quad \begin{matrix} \nwarrow \\ \swarrow \end{matrix} \quad \text{függetlenek, ha } \forall i, j \in \mathbb{N}$$

$$P(A_i B_j) = P(A_i) P(B_j)$$

Legyen k_{ij} az $A_i B_j$ gyakorisága

$$n = \sum_{i,j} k_{ij} \qquad k_{i\bullet} = \sum_j k_{ij} \qquad k_{\bullet j} = \sum_i k_{ij}$$

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{\left(k_{ij} - \frac{k_{i\bullet} k_{\bullet j}}{n}\right)^2}{k_{i\bullet} k_{\bullet j}}$$

$(r-1) \times (s-1)$ szabadsági fokú χ^2 eloszlás

Homogenitásvizsgálat

El akarjuk dönteni, hogy két minta ugyanabból az eloszlásból származik-e.

Gyakoriságok

Lehetséges kimenetelek			
	μ_1	ν_1	$\mu_1+\nu_1$
	μ_2	ν_2	$\mu_2+\nu_2$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	μ_r	ν_r	$\mu_r+\nu_r$
	m db	n db	$n+m$ db

$$\chi^2 = mn \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\mu_i+\nu_i}\left(\frac{\mu_i}{m}-\frac{\nu_i}{n}\right)^2$$

$r-1$ szabadsági fokú χ^2-eloszlás $(n, m \to \infty)$

Többváltozós módszerek

Regresszió-számítás

$X_1, X_2, \ldots, X_p$	változók
$x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ip}$	a minta i-dik eleme

$$\bar{x}_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{ij}}{n}$$ átlagvektor

$$S_j^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2$$ szórásvektor

$$c_{jk} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_{ij} - \bar{x}_j)(x_{ik} - \bar{x}_k)$$ kovariancia-mátrix

$$r_{jk} = \frac{c_{jk}}{S_j S_k}$$ korreláció-mátrix

$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$

$$\xi_1 = a_1 + b_{12}\xi_2 + b_{13}\xi_3 + \cdots + b_{1n}\xi_n$$

Regressziós sík

$$\left\langle(\xi_1 - a_1 - b_{12}\xi_2 - b_{13}\xi_3 - \cdots - b_{1n}\xi_n)^2\right\rangle = f \qquad \text{minimális}$$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial a_1} \qquad \rightarrow \qquad 2\left\langle \xi_1 - a_1 - b_{12}\xi_2 - \cdots - b_{1n}\xi_n \right\rangle = 0$$

$$\langle \xi_1 \rangle - \sum_{i=2}^{n} b_{1i} \langle \xi_i \rangle = a_1$$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial b_{1i}} \qquad \rightarrow \qquad 2\left\langle (\xi_1 - a_1 - b_{12}\xi_2 - \cdots - b_{1n}\xi_n)\xi_i \right\rangle = 0$$

$$\langle \xi_1 \xi_i \rangle - a_1 \langle \xi_i \rangle - \sum_{i=2}^{n} b_{1j} \langle \xi_j \xi_i \rangle = 0$$

$$\langle \xi_1 \xi_i \rangle - \langle \xi_1 \rangle \langle \xi_i \rangle - \sum_{i=2}^{n} b_{1j} \left\{ \langle \xi_j \xi_i \rangle - \langle \xi_i \rangle \langle \xi_1 \rangle \right\} = 0$$

$$c_{1i} = \langle (\xi_1 - \langle \xi_1 \rangle)(\xi_i - \langle \xi_i \rangle) \rangle = 0$$

$$c_{1i} = \sum_{j=2}^{n} b_{1j} c_{ji} \qquad i \neq 1$$

Általában vehetjük a min $\left\langle \left(\xi_k - a_k - \sum_{j \neq k} b_{kj} \xi_j \right)^2 \right\rangle$ regressziós feladatot is. Ekkor

$$c_{ki} = \sum_{j \neq k} b_{kj} c_{ji} \qquad i \neq k$$

$$0 = \sum_{j} b_{kj} c_{ji} \qquad i \neq k, \; b_{kk} = -1$$

$$b_{kj} = \alpha \left(c^{-1} \right)_{kj} \qquad b_{kk} = -1 = \alpha \left(c^{-1} \right)_{kk}$$

$$\alpha = -1/\left(c^{-1}\right)_{kk}$$

$$\left(c^{-1}\right)_{ij} = (-1)^{i+j}\frac{C_{ij}}{|C|}$$

ahol C_{ij} az (i,j) elemhez tartozó aldeterminans.

$$\alpha = -\frac{|C|}{C_{kk}}$$

$$\boxed{b_{ij} = (-1)^{i+j+1}\frac{C_{ij}}{C_{jj}}}$$

$$\boxed{a_i = \langle \xi_i \rangle + \sum_{i \neq j} (-1)^{i+j}\frac{C_{ij}}{C_{jj}}\langle \xi_j \rangle}$$

Példa (1958):

A férj életkora	A feleség életkora	Gyakoriság
–18	18.45	225
18–19	19.10	4492
20–24	20.36	36225
25–29	22.31	25089
30–34	26.61	8707
35–39	30.87	4728
40–44	35.62	2482
45–49	39.58	2965
50–59	46.29	4015
60–69	54.06	1862
69–	59.61	649

$$\bar{x}_{\text{férj}} = 28.92$$
$$\bar{x}_{\text{feleség}} = 25.11$$
$$C_{12} = 88.41$$
$$S_1^2 = 113.45$$
$$S_1 = 10.65$$
$$S_2^2 = 94.79$$
$$S_2 = 9.72$$

$$b_{12} = \frac{C_{12}}{C_{22}} = \frac{88.41}{94.79} = 0.936$$
$$a_1 = 25.11 - 0.936 \cdot 28.92 = -1.95$$
$$y = 0.936x - 1.95$$

Viszont:

$$b_{21} = \frac{C_{21}}{C_{11}} = \frac{88.41}{113.49} = 0.779$$
$$a_2 = 28.92 - 0.779 \cdot 25.11 = 9.36$$
$$x = 9.36 + 0.779y$$

Főkomponens analízis

$X_1, X_2, \ldots, X_p$ mért valószínűségi változók

$$Z_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1p}X_p$$
$$Z_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2p}X_p$$
$$\vdots$$
$$Z_p = a_{p1}X_1 + a_{p2}X_2 + \cdots + a_{pp}X_p$$

Főkomponensek: $\langle Z_i Z_j \rangle = 0$

$$\sigma(Z_1) \geqslant \sigma(Z_2) \geqslant \ldots \geqslant \sigma(Z_p)$$

Független komponensek, melyek értéke a legnagyobb hatást gyakorolja az adatok változatosságára.

($\langle X_i \rangle = 0$, $\left\langle X_i^2 \right\rangle = 1$ standardizált változók)

$\forall i \in \mathbb{N}$ esetén $\sum_j a_{ij}^2 = 1$, különben indefinit. Az a_{ij} vektorok a kovariancia mátrix sajátvektorai lesznek:

$$\begin{bmatrix} 1 & C_{12} & C_{13} & \dots \\ C_{21} & 1 & C_{23} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ C_{p1} & C_{p2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{ip} \end{bmatrix} = \lambda_i \begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{ip} \end{bmatrix}$$

$$\langle Z_i Z_{i'} \rangle = \left\langle \left(\sum_j a_{ij} X_j \right) \left(\sum_{j'} a_{i'j'} X_{j'} \right) \right\rangle = \sum_{jj'} a_{ij} a_{i'j'} \langle X_j X_{j'} \rangle =$$

$$= \sum_j a_{ij} \sum_{j'} C_{jj'} a_{i'j'} = \sum_j \lambda_{i'} a_{i'j} a_{ij} = \lambda_{i'} \delta_{ii'}$$

$$\sigma^2(Z_i) = \langle Z_i Z_i \rangle = \lambda_i \delta_{ii} = \lambda_i$$

$$\sum_i \lambda_i = p$$

Példa: Munkamegosztás Európában (1986)

$$
\begin{aligned}
Z_1 = {} & 0.52(\mathrm{AGR}) + 0.00(\mathrm{MIN}) - 0.35(\mathrm{MAN}) - 0.26(\mathrm{PS}) - \\
& - 0.33(\mathrm{CON}) - 0.38(\mathrm{SER}) - 0.07(\mathrm{FIN}) - 0.39(\mathrm{SPS}) - \\
& - 0.37(\mathrm{TC}) \approx \mathrm{AGR} - \text{többi}
\end{aligned}
$$

$$\lambda_1 = 3.487 \quad (38.7\%)$$

$$
\begin{aligned}
Z_2 = {} & 0.05(\mathrm{AGR}) + 0.62(\mathrm{MIN}) + 0.36(\mathrm{MAN}) + 0.26(\mathrm{PS}) + \\
& + 0.05(\mathrm{CON}) - 0.35(\mathrm{SER}) - 0.45(\mathrm{FIN}) - 0.22(\mathrm{SPS}) + \\
& + 0.20(\mathrm{TC}) \qquad \mathrm{MIN} + \mathrm{MAN} - (\mathrm{FIN} + \mathrm{SPS} + \\
& \qquad\qquad\qquad + \mathrm{TC} + \mathrm{PS} + \mathrm{SER})
\end{aligned}
$$

$$\lambda_2 = 2.130 \quad (23.6\%)$$

$$\lambda_9 = 0!!!$$

Table 5.5 The correlation matrix for percentages employed in nine industry groups in 26 countries in Europe, in lower diagonal form, calculated from Table 1.5.

	AGR	*MIN*	*MAN*	*PS*	*CON*	*SER*	*FIN*	*SPS*	*TC*
Agriculture	1.000								
Mining	0.036	1.000							
Manufacturing	−0.671	0.445	1.000						
Power supplies	−0.400	0.406	0.385	1.000					
Construction	−0.538	−0.026	0.495	0.060	1.000				
Service industries	−0.737	−0.397	0.204	0.202	0.356	1.000			
Finance	−0.220	−0.443	−0.156	0.110	0.016	0.366	1.000		
Social & Personal Services	−0.747	−0.281	0.154	0.132	0.158	0.572	0.108	1.000	
Transport & communications	−0.565	0.157	0.351	0.375	0.388	0.188	−0.246	0.568	1.000

Figure 5.2 European countries plotted against the first two principal components, Z_1 and Z_2 for employment variables.

Faktoranalízis

$$\begin{aligned} X_1 &= a_1 F + e_1 \\ X_2 &= a_2 F + e_2 \\ \vdots & \qquad \vdots \end{aligned}$$

$$X_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ij} F_j + e_i$$

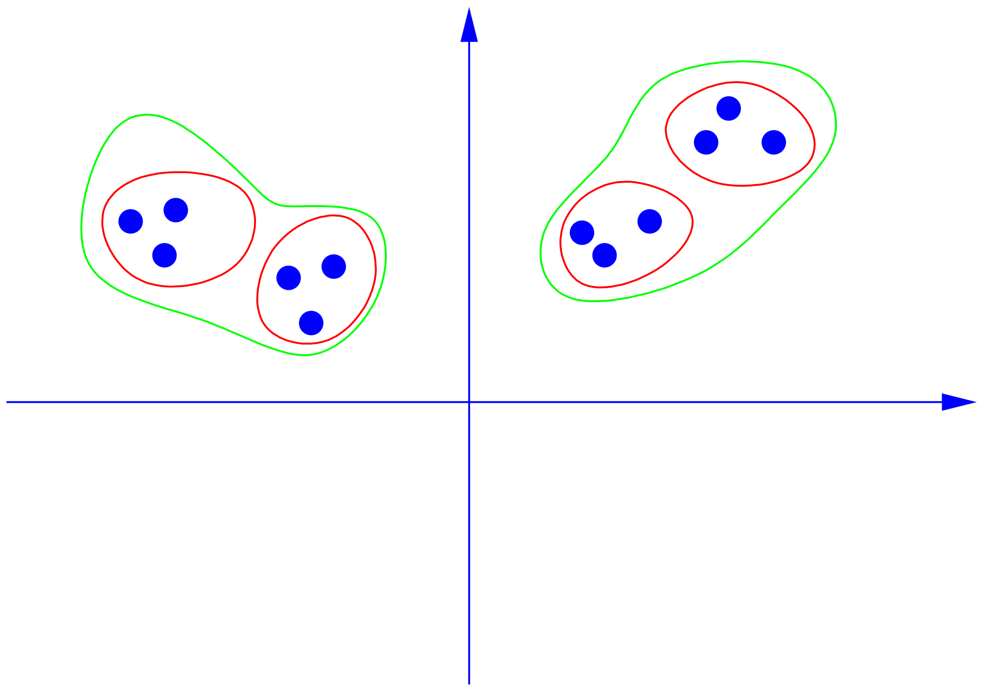
Közös faktorok F_i, $k < p$. Kiindulás a főkomponensekből

$$X_i = \sum_{j} a_{ij}^T Z_j$$

$\lambda_i < 1$ esetén eleve inszignifikáns a főkomponens

$$X_i = \sum_{j \leqslant p} a_{ij}^T Z_j + e_i$$

Klaszter analízis



d_{ij} távolság sok dimenzióban az egyes mintaelemek között $\longrightarrow$ csoportosítás a távolság szerint

Sztochasztikus folyamatok

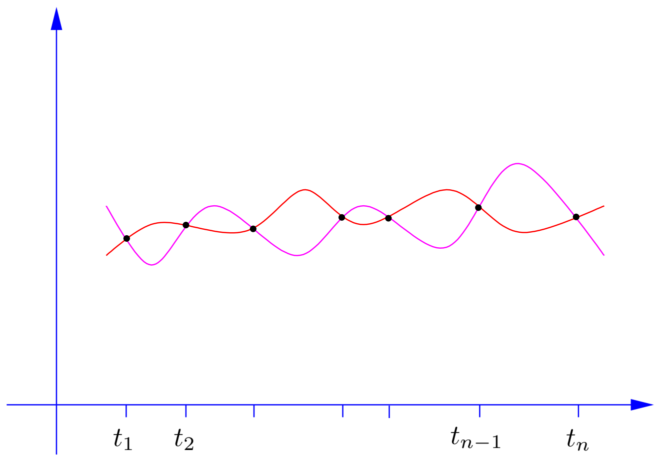
$x(t), t \in I$ véletlen változók egy családja

$I =$ megszámlálható lánc (véletlen sorozat)

$I = \mathbb{R}$ sztochasztikus folyamat

$I = \mathbb{R}^d$ sztochasztikus mező

$t :=$ idő, $x(t)$ valós függvény



$(x_1, t_1), (x_2, t_2), \ldots, (x_n, t_n)$ trajektória

A folyamatot sűrűségfüggvényeinek rendszere határozza meg:

$$P_1(x_1,t_1)$$

$$P_2(x_1,t_1;x_2,t_2)$$

$$P_3(x_1,t_1;x_2,t_2;x_3,t_3)$$

$$\vdots$$

$$P_2(x_1,t_1;x_2,t_2;\dots;x_n,t_n)\,dx_1\,dx_2\cdots dx_n$$

annak a valószínűsége, hogy a trajektória értéke a t_1, t_2, ... , t_n időkben az $(x_1, x_1 + dx_1)$; $(x_2, x_2 + dx_2)$; ... ; $(x_n, x_n + dx_n)$ intervallumba esik.

Normáltság: $\displaystyle\int P_n(x_1,t_1;\dots;x_n,t_n)\,dx_1\cdots dx_n = 1$

Kompatibilitás:

$$\int P_n(\dots;x_i,t_i;\dots)\,dx_i = P_{n-1}(\dots;x_{i-1},t_{i-1};x_{i+1},t_{i+1};\dots)$$

Várható érték: $f(x(t_1), x(t_2), x(t_3))$

$$\langle f \rangle = \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) P_n(x_1, t_1; \dots ; x_n, t_n)\, dx_1 \cdots dx_n$$

Karakterisztikus függvény

$$\Phi_n(y_1, t_1; y_2, t_2; \dots ; y_n, t_n) = \left\langle e^{i \sum_{j=1}^{n} y_j x(t_j)} \right\rangle$$

a P_n sűrűségfüggvény Fourier-transzformáltja.

$$\Phi_n(0, t_1; 0, t_2; \dots ; 0, t_n) = 1$$

$$\Phi_n(\dots ; 0, t_i; \dots) = \Phi_{n-1}(\dots ; y_{i-1}, t_{i-1}; y_{i+1}, t_{i+1}; \dots)$$

Momentumok

$$m_{l_1 l_2 \dots l_n} \equiv \left\langle x^{l_1}(t_1) x^{l_2}(t_2) \cdots x^{l_n}(t_n) \right\rangle =$$

$$= (-i)^{l_1 + l_2 + \cdots + l_n} \left. \frac{\partial^{l_1 + l_2 + \cdots + l_n} \Phi_n}{(\partial y_1)^{l_1} (\partial y_2)^{l_2} \cdots (\partial y_n)^{l_n}} \right|_{y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 0}$$

Korrelációs függvény

$$K(t_1,t_2) = \Big\langle \big(x(t_1) - \langle x(t_1)\rangle\big)\big(x(t_2) - \langle x(t_2)\rangle\big)\Big\rangle =$$
$$= \langle x(t_1)x(t_2)\rangle - \langle x(t_1)\rangle \langle x(t_2)\rangle$$

Nincs korreláció, vagy korrelálatlan a t_1-ben és t_2-ben lejátszódó folyamat, ha $K(t_1,t_2) = 0$.

Stacionárius folyamat Olyan folyamat, melynek sűrűségfüggvénye invariáns az időeltolással szemben:

$$P_n(x_1,t_1;\ldots;x_n,t_n) = P_n(x_1,t_1+\tau;\ldots;x_n,t_n+\tau)$$

tatszőleges τ esetén. Pl.:

$$P_1(x_1,t_1) = P_1(x_1,t_1+\tau) \quad \Rightarrow \quad P_1(x_1) \text{ időfüggetlen}$$

$$P_2(x_1,t_1;x_2,t_2) = P_2(x_1,0;x_2,t_2-t_1) \quad \text{csak } t_2 - t_1 \text{ különbségtől függ}$$

$$
\begin{aligned}
K(t_1,t_2) &= \langle x(t_1)x(t_2)\rangle - \langle x(t_1)\rangle \langle x(t_2)\rangle = \\
&= \int x_1 x_2 P_2(x_1,t_1;x_2,t_2)\, dx_1\, dx_2 - \\
&- \int x_1 P_1(x_1,t_1)\, dx_1 \int x_2 P_1(x_2,t_2)\, dx_2
\end{aligned}
$$

stacionárius esetben

$$
\begin{aligned}
&= \int x_1 x_2 P_2(x_1,t_1-t_2;x_2,0)\, dx_1\, dx_2 - \\
&- \int x_1 P_1(x_1)\, dx_1 \int x_2 P_1(x_2)\, dx_2 = C(t_1-t_2)
\end{aligned}
$$

Spektrális sűrűség

$$
X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x(t) - \langle x(t)\rangle\right) e^{i\omega t}\, dt
$$

$$\langle X(\omega)X^*(\omega')\rangle = \left\langle \int_{-\infty}^{+\infty} (x(t_1) - \langle x(t_1)\rangle) e^{i\omega t_1}\, dt_1 \times \right.$$

$$\left. \times \int_{-\infty}^{+\infty} (x(t_2) - \langle x(t_2)\rangle) e^{-i\omega' t_2}\, dt_2 \right\rangle =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega-\omega')t_2 + i\omega(t_1-t_2)} K(t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2 = \ldots$$

Legyen $\tau = t_1 - t_2$, $K(t_1, t_2) = C(t_1 - t_2)$. Ekkor

$$\ldots = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega-\omega')t_2}\, e^{i\omega\tau} C(\tau)\, d\tau\, dt_2 =$$

$$= S(\omega) \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega-\omega')t_2}\, dt_2 = 2\pi\, S(\omega)\, \delta(\omega - \omega')$$

Ahol bevezettük az $\quad S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} C(\tau)\, d\tau \quad$ jelölést.

Független folyamat

$$P_n(x_1, t_1; \ldots ; x_n, t_n) = \prod_{l=1}^{n} P_1(x_l, t_l)$$

Markov folyamat

A múlt és a jövő statisztikusan független, csak a jelen állapotot kell megadni.

Markov tulajdonság

Legyen $t_1 > t_2 > t_3 > \cdots > t_n$

$$P(x_1, t_1 | x_2, t_2; \ldots ; x_n, t_n) = \frac{P_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \ldots ; x_n, t_n)}{P_{n-1}(x_2, t_2; \ldots ; x_n, t_n)}$$

$$\Downarrow$$

$$P(x_1, t_1 | x_2, t_2; \ldots ; x_n, t_n) = \underbrace{P(x_1, t_1 | x_2, t_2)}_{\text{Átmeneti valószínűség}}$$

$$P(x_1, t_1 | x_2, t_1) = \delta(x_1 - x_2)$$

$$P_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \ldots; x_n, t_n) = P(x_1, t_1 | x_2, t_2) P_{n-1}(x_2, t_2; \ldots; x_n, t_n)$$

$$P_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \ldots; x_n, t_n) = P(x_1, t_1 | x_2, t_2) P(x_2, t_2 | x_3, t_3) \cdots$$
$$\cdots P(x_{n-1}, t_{n-1} | x_n, t_n) P_1(x_n, t_n)$$

Kompatibilitási feltételből következik a
Chapman – Kolmogorov-egyenlet:

$$P(x_1, t_1 | x_3, t_3) = \int P(x_1, t_1 | x_2, t_2) P(x_2, t_2 | x_3, t_3) \, dx_2$$

Az infinitezimális operátor:
Legyen $f(x)$ korlátos függvény, $\|f\| = \sup |f| < +\infty$,

$$\boxed{\mathcal{T}_{t',t} \, f(x') = \int f(x) P(x, t | x', t') \, dx} \qquad t' < t$$

Ha $f(x) \geqslant 0$ akkor $\mathcal{T}_{t',t} \, f(x) \geqslant 0$ (pozitív).

$$\|\mathcal{T}_{t',t}\, f\| = \sup \left| \int f(x) P(x,t|x',t')\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup |f| \int P(x,t|x',t')\, dx = \|f\| \quad \text{(kontrakció)}$$

$$\boxed{\mathcal{T}_{t,t} = \mathcal{I}}$$

Chapman – Kolmogorov-egyenlet

$$\mathcal{T}_{t',t}\, f(x') = \iint f(x) P(x,t|x'',t'') P(x'',t''|x',t')\, dx''\, dx =$$

$$= \mathcal{T}_{t',t''} \mathcal{T}_{t'',t}\, f(x) \qquad t' < t'' < t$$

$$\boxed{\mathcal{T}_{t',t} = \mathcal{T}_{t',t''} \mathcal{T}_{t'',t}}$$

$\mathcal{T}$ multiplikatív

Infinitezimális operátor

$$\mathcal{A}_t f = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}(\mathcal{T}_{t,t+s} f - f)$$
$$\mathcal{T}_{t,t+s} = \mathcal{I} + \mathcal{A}_t s + \mathcal{O}\left(s^2\right)$$

Kolmogorov-egyenlet

$$\frac{1}{s}(\mathcal{T}_{t',t+s} - \mathcal{T}_{t',t}) = \frac{1}{s}\mathcal{T}_{t',t}\,(\mathcal{T}_{t,t+s} - \mathcal{I}) \qquad (s \to 0)$$
$$\frac{d}{dt}\mathcal{T}_{t',t} = \mathcal{T}_{t',t}\,\mathcal{A}_t \qquad \text{(forward egyenlet)}$$
$$\frac{1}{s}(\mathcal{T}_{t',t+s} - \mathcal{T}_{t',t}) = \frac{1}{s}(\mathcal{I} - \mathcal{T}_{t',t'+s})\mathcal{T}_{t'+s,t} \qquad (s \to 0)$$
$$\frac{d}{dt'}\mathcal{T}_{t',t} = -\mathcal{A}_{t'}\mathcal{T}_{t',t} \qquad \text{(backward egyenlet)}$$

Homogén folyamat esetén

$$\mathcal{T}_{t',t} = \mathcal{T}_{t-t'} \qquad \mathcal{T}_t\, f = \int f(x) P(x,t|x')\, dx$$

$$\mathcal{T}_t \mathcal{T}_s = \mathcal{T}_{t+s} = \mathcal{T}_s \mathcal{T}_t$$

$$\mathcal{A}\, f = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}(\mathcal{T}_s\, f - f)$$

$$\frac{d}{dt'}\mathcal{T}_{t',t} = -\frac{d}{dt}\mathcal{T}_{t-t'}$$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{T}_t = \mathcal{T}_t\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{T}_t \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{T}_0 = \mathcal{I}, \qquad \mathcal{T}_t = e^{\mathcal{A}t}$$

Markov félcsoport, generátora $\mathcal{A}$

Pl.: diffúziós folyamatok

$$\mathcal{A}_t = b(x,t)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\frac{\partial}{\partial x^2}$$

Kompatibilitás $n = 2$ esetén: $P_1(x,t) = \int P(x,t|x',t')P_1(x',t')\,dx'$

Ismert $P_1(x',t') \to$ későbbi időpontban is kiszámítható.

Homogén Markov folyamat

$$P(x,t|x',t') = P(x,t-t'|x')$$

egyben stacionárius is

$$P(x,t+s|x') = \int P(x,t|x'')P(x'',s|x')\,dx''$$

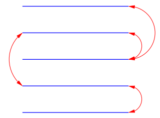
Ergodikus Markov-folyamat: ha $\lim_{t\to\infty} P_1(x,t) = P^*(x)$ függetlenül a $P_1(x,0)$ kezdeti feltételtől.

$$P_1(x,t) = \int P(x,t|x',0)P_1(x',0)\,dx' \to P^*(x) \quad (t\to\infty)$$

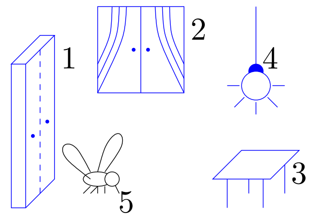
$$\Rightarrow \qquad P(x,t|x',0) \to P^*(x)$$

Diszkrét állapottérben lezajló folyamatok

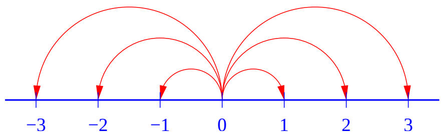
Pl.: • atom diszkrét állapotai



• légy



• bolyongás a számegyenesen



Az $n \to n'$ átmenet valószínűsége $p \sim w_{n',n} \cdot \Delta t + \mathcal{O}\left(\Delta t^2\right)$

$P_{nm}(t)$ annak a valószínűsége, hogy m-ből indulva t idő alatt az n állapotba kerül.

$$P_{nm}(t+\Delta t) = \sum_{l\neq n} w_{nl} P_{lm}(t)\Delta t + \Big(1 - \sum_{l\neq n} w_{ln}\Delta t\Big) P_{nm}(t)$$

$$\dot{P}_{nm}(t) = \underbrace{\sum_{l\neq n} w_{nl} P_{lm}(t)}_{\text{beszórás}} - \underbrace{P_{nm}(t)\sum_{l\neq n} w_{ln}}_{\text{kiszórás}} \qquad \text{Master-egyenlet}$$

Kezdeti feltétel $\quad P_{nm}(0) = \delta_{nm}; \quad \dot{P}_{nm}(t=0) = w_{nm} \qquad n \neq m$

Legyen a kezdeti eloszlás P_m; $\sum_m P_m = 1$. Ekkor

$$P_n(t) = \sum_m P_{nm}(t) P_m(0)$$

$$\dot{P}_n(t) = \sum_{l \neq n} w_{nl} P_l(t) - P_n(t) \sum_{l \neq n} w_{ln}$$

szintén kielégíti a Master-egyenletet.

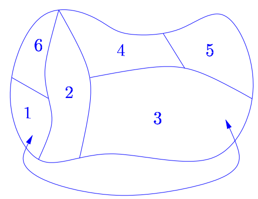
A megoldások tulajdonságai

1. Mindig van legalább egy stacionárius (időtől független) megoldás.

2. A stacionárius megoldás egyértelmű, ha minden állapotból el lehet jutni (egy vagy több lépésben) minden más állapotba.
   Ekkor kezdeti $P_n(t) \to P_n^*$ és $P_{nm}(t) \to P_n^*$
   Ergodikus tulajdonság

Reverzibilis folyamatok

$$\boxed{w_{nm} = w_{mn}}$$



$$S(t) = -\sum_n P_n(t) \ln P_n(t) \qquad \text{entrópia}$$

$$\dot{S}(t) = -\sum_n \dot{P}_n(t) \left(\ln P_n(t) + 1\right) =$$

$$= -\sum_{nm} w_{nm} \left(P_m(t) - P_n(t)\right) \left(\ln P_n(t) + 1\right)$$

indexcsere és $w_{nm} = w_{mn}$ felhasználása után

$$\dot{S}(t) = \frac{1}{2} \sum_{nm} w_{nm} \Big\{ \big(P_n(t) - P_m(t)\big) \big(\ln P_n(t) - \ln P_m(t)\big) \Big\} \geqslant 0$$

$S(t)$ nem csökken, állandó, ha $\boxed{P_n = P_m}$

Általános megoldás

$$A_{nn'} = w_{nn'}(1-\delta_{nn'}) - \delta_{nn'}\sum_{l\neq n} w_{ln'}$$

$$\dot{P}_n(t) = \sum_{n'} A_{nn'} P_{n'}(t)$$

ennek partikuláris megoldásai

$$P_n^{(\alpha)}(t) = e^{-\lambda_\alpha t}\varphi_n^{(\alpha)}$$

$$\dot{P}_n(t) = -\lambda_\alpha \varphi_n^{(\alpha)} e^{-\lambda_\alpha t} = \sum_{n'} A_{nn'}\varphi_{n'}^{(\alpha)} e^{-\lambda_\alpha t}$$

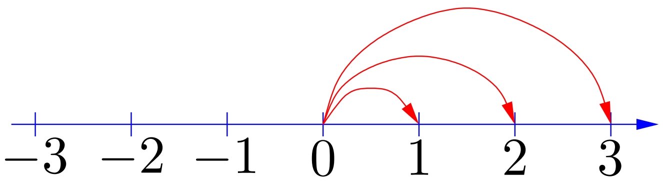
$$\boxed{\sum_{n'} A_{nn'}\varphi_{n'}^{(\alpha)} = -\lambda_\alpha \varphi_n^{(\alpha)}} \qquad \lambda_\alpha \geqslant 0$$

A stacionárius megoldás $\lambda_\alpha = 0$-nál

$$P_n(t) = \sum_\alpha c_\alpha e^{-\lambda_\alpha t}\varphi_n^{(\alpha)} \quad \longrightarrow \quad c_{\alpha^*}\varphi_n^{(\alpha^*)}$$

ahol α^* a stacionárius megoldás; a többi kihal az $e^{-\lambda_\alpha t} \to 0$ miatt.

Bolyongási folyamat



Az ugrási valószínűség független attól, hogy hol állunk, csak a távolságtól függ:

$$w_{nm} = w_{n-m}$$

$$\frac{dP_{nm}(t)}{dt} = \sum_{l \neq n} w_{nl} P_{lm}(t) - P_{nm}(t) \sum_{l \neq n} w_{ln}$$

$$P_{nm}(t) = P_{n-m,0}(t)$$

$$n - m = k \quad \text{jelöléssel} \qquad P_k(t) = P_{k,0}(t)$$

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = \sum_{l \neq 0} w_l P_{k-l}(t) - P_k(t) \sum_{l \neq 0} w_l$$

$$P_k(0) = \delta_{k,0}$$

$$P_k(t) = e^{-\lambda t + i\alpha k} \qquad \alpha \in [-\pi, \pi]$$

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = -\lambda P_k(t) = \sum_{l \neq 0} w_l e^{-\lambda t + i\alpha(k-l)} - \sum_{l \neq 0} w_l \cdot P_k(t) =$$

$$= P_k(t) \sum_{l \neq 0} w_l \left(e^{-i\alpha l} - 1\right)$$

$$\lambda = \sum_{l \neq 0} \left(1 - e^{-i\alpha l}\right) w_l$$

Legyen $w_{-l} = w_l$. Ekkor

$$\boxed{\lambda(\alpha) = \sum_{l > 0} 2(1 - \cos(\alpha l)) w_l}$$

$$P_k(0) = \delta_{k,0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\alpha k}\, d\alpha$$

$$P_k(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\alpha k - \sum\limits_{l>0} 2(1-\cos(\alpha l))w_l t}\, d\alpha$$

Hosszú idejű viselkedésnél ($t \to \infty$) fontosak a $\lambda(\alpha) \approx 0$ sajátértékek, mert ezek halnak ki lassan.

$$\alpha \approx 0 \qquad\qquad \cos(\alpha l) \approx 1 - \frac{\alpha^2 l^2}{2}$$

$$P_k(t) \approx \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha k - \sum\limits_{l>0} \alpha^2 l^2 w_l t}\, d\alpha$$

$$\sum_{l>0} l^2 w_l = \frac{1}{2}\sum_{l\neq 0} l^2 w_l = \frac{1}{2}\frac{L^2}{\tau} = \frac{1}{2}D$$

$$P_k(t) \approx \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha k - \frac{1}{2}\alpha^2 Dt}\, d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}Dt\left(\alpha - i\frac{k}{Dt}\right)^2 - \frac{k^2}{2Dt}}\, d\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}} e^{-\frac{k^2}{2Dt}}$$

Elegendően hosszú idő után normális eloszlás, $\sigma^2 = Dt$

Mi a helyzet, ha: $D = 2\sum_{l>0}^{\infty} w_l l^2 = +\infty$?

Szuper diffúzió, anomális diffúzió $\quad w_l \sim \frac{1}{l^\nu} \quad$ Lévy-folyamatok

$$\sum_l w_l l^2 = \sum_l l^{2-\nu} \qquad \nu \leqslant 3 \text{ esetén divergens}$$

$$1 - \cos(\alpha l) = 2\sin^2\left(\frac{\alpha l}{2}\right)$$

$$\sum_{l>0} 4\sin^2\left(\frac{\alpha l}{2}\right) \cdot w_l \sim \sum_{l>0} 4\sin^2\left(\frac{\alpha l}{2}\right)\frac{1}{l^\nu} =$$

$$= |\alpha|^{\nu-1} \sum_{l>0} 4\sin^2\left(\frac{|\alpha| l}{2}\right)\frac{1}{|\alpha|^\nu l^\nu} \cdot |\alpha| \approx$$

$$\approx |\alpha|^{\nu-1} \int_0^{+\infty} \frac{8\sin^2(x)}{x^\nu}\, dx \approx C|\alpha|^{\nu-1} + \ldots$$

$$dx = \frac{\alpha}{2}\Delta l = \frac{\alpha}{2} \qquad \mu = \nu - 1$$

$$P_k(t) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{ik\alpha - C|\alpha|^\mu t}\, d\alpha$$

$$|\alpha|^\mu t = y^\mu \qquad \alpha t^{1/\mu} = y$$

$$\alpha = \frac{y}{t^{1/\mu}} \qquad d\alpha = \frac{dy}{t^{1/\mu}}$$

$$P_k(t) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^{1/\mu}} e^{iky/t^{1/\mu} - C|y|^\mu}\, dy = \frac{1}{t^{1/\mu}} h\left(\frac{k}{t^{1/\mu}}\right)$$

Lévy stabil folyamat

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{ixy - C|y|^\mu}\, dy = \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\pi} e^{ixy - Cy^\mu}\, dy$$

Pl.: $\mu = 1$ Chauchy $h(x) = \dfrac{1}{\pi\left(x^2+1\right)}$

$\mu = 2$ Gauss

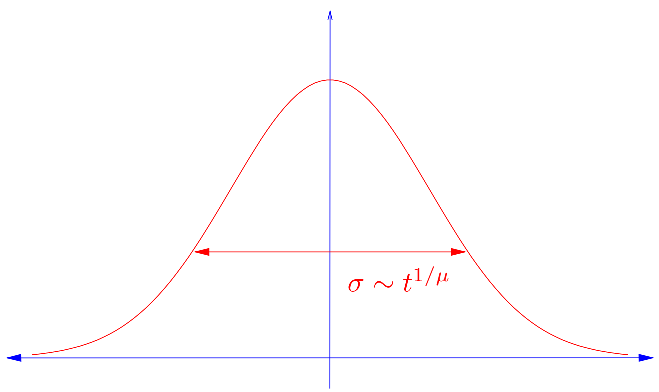
$$\sigma^2 = \sum_k P_k(t) k^2 \approx \sum_k \frac{1}{t^{1/\mu}} h\left(\frac{k}{t^{1/\mu}}\right) k^2 \approx$$

$$\approx t^{1/\mu} \sum_k \left(\frac{k}{t^{1/\mu}}\right)^2 h\left(\frac{k}{t^{1/\mu}}\right) \approx \ldots$$

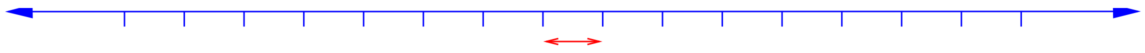
$$y = \frac{k}{t^{1/\mu}} \qquad\qquad dy = \frac{1}{t^{1/\mu}} \Delta k$$

$$\ldots \approx t^{2/\mu} \int y^2 h(y)\, dy$$

$$\sigma^2 \sim t^{2/\mu}$$



Bolyongási folyamat folytonos határátmenete



Balra vagy jobbra ugorhat csak:
$$w_{n,n+1} = w_n^+ = w^+(x)$$
$$w_{n,n-1} = w_n^- = w^-(x)$$

$$\frac{dP_n}{dt} = w_{n,n+1} P_{n+1} + w_{n,n-1} P_{n-1} - P_n (w_{n+1,n} + w_{n-1,n}) =$$
$$= w_n^+ P_{n+1} + w_n^- P_{n-1} - P_n \left(w_{n+1}^- + w_{n-1}^+ \right)$$

$$P_n(t) = P(x = na, t)$$

$$P_{n+1}(t) = P(x = (n+1)a, t) \approx P(x,t) + \frac{\partial P}{\partial x} a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} a^2 + \ldots$$

$$P_{n-1}(t) \approx P(x,t) - \frac{\partial P}{\partial x} a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} a^2 + \ldots$$

$$w_{n+1}^+ \approx w^+(x) + \frac{\partial w^+}{\partial x} a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w^+}{\partial x^2} a^2 + \ldots$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \; & w^{+}(x)\left[P(x,t) + \frac{\partial P}{\partial x}a + \frac{1}{2}a^{2}\frac{\partial^{2} P}{\partial x^{2}}\right] + \\
& + w^{-}(x)\left[P(x,t) - \frac{\partial P}{\partial x}a + \frac{1}{2}a^{2}\frac{\partial^{2} P}{\partial x^{2}}\right] - \\
& - P(x,t)\left[w^{-} + a\frac{\partial w^{-}}{\partial x} + \frac{1}{2}a^{2}\frac{\partial^{2} w^{-}}{\partial x^{2}} + \right. \\
& \qquad \left. + \, w^{+} - a\frac{\partial w^{+}}{\partial x} + \frac{1}{2}a^{2}\frac{\partial^{2} w^{+}}{\partial x^{2}}\right] + \mathcal{O}\left(a^{3}\right) = \\
& = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(a w^{+}(x) - a w^{-}(x)\right) P(x,t)\right\} + \\
& + \frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}\left\{\frac{1}{2}a^{2}\left(w^{+}(x) + w^{-}(x)\right) P(x,t)\right\} - \\
& - \frac{\partial}{\partial x}\left\{a^{2}\left(\frac{\partial w^{+}}{\partial x} + \frac{\partial w^{-}}{\partial x}\right) P(x,t)\right\}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\Big(b(x,t)P(x,t)\Big) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(\sigma^2(x,t)P(x,t)\Big)}$$

$$b(x,t) = a^2\left(\frac{\partial w^+}{\partial x} + \frac{\partial w^-}{\partial x}\right) - a\left(w^+ - w^-\right)$$

$$\sigma^2(x,t) = a^2\left(w^+ + w^-\right)$$

Fokker–Planck egyenlet

Diffúziós-folyamatok

A Markov-folyamat az

$$\boxed{\mathcal{A}_t = b(x,t)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}}$$

generátorral diffúziós-folyamat.

$$\frac{d}{dt}\mathcal{T}_{t',t}\, f = \mathcal{T}_{t',t}\,\mathcal{A}_t\, f$$
$$\mathcal{T}_{t',t} = P(x,t|x',t')$$

$$\int \left\{ \frac{\partial P(x,t|x',t')}{\partial t} - P(x,t|x',t')\left[b(x,t)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\right\} f(x)\,dx = 0$$
$$\int \left\{ \frac{\partial P(x,t|x',t')}{\partial t} f - P(x,t|x',t')\left[b(x,t)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]\right\} dx = 0$$

Parciális integrálás után

$$\int \left\{ \frac{\partial P}{\partial t} f + f(x) \frac{\partial}{\partial x} P(x,t|x',t') b(x,t) - \frac{\partial}{\partial x}\big(P(x,t|x',t')b(x,t)f(x)\big) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial x}\left[P(x,t|x',t')\frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\right]\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left[P(x,t|x',t')\frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\frac{\partial f}{\partial x}\right]\right\} dx = 0$$

$$\int dx \frac{\partial}{\partial x} g(x) \quad \to \quad [g(x)]_\infty \to 0$$

$$\int \left\{ \frac{\partial P}{\partial t} f + f \frac{\partial}{\partial x} Pb + \frac{\partial}{\partial x}\left[P(x,t|x',t')\frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\right]\frac{\partial f}{\partial x}\right\} dx$$

$$\int \left\{ \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Pb) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(P\sigma^2\right)\right\} f(x)\, dx = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Pb) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(P\sigma^2\right)}$$

Fokker–Planck egyenlet az átmeneti valószínűségre

$$\lim_{t \to t'} P(x,t|x',t') = \delta(x - x') \qquad \text{kezdeti feltétellel.}$$

Legyen kezdeti eloszlásunk, $P(x,t=0)$ adott. Egy későbbi időpontban:

$$P(x,t) = \int P(x,t|x',0)P(x',t=0)\,dx'$$

$\Rightarrow P(x,t)$ szintén kielégíti a Fokker–Planck egyenletet, ha $P(x,t) \to 0$, $|x| \to \infty$ esetén

$$\boxed{\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\big(b(x,t)P(x,t)\big) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sigma^2(x,t)P(x,t)\right)}$$

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}J(x,t)$$

$$J(x,t) = \left(b(x,t) - \sigma(x,t)\frac{\partial \sigma(x,t)}{\partial x}\right)P(x,t) - \frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\frac{\partial P(x,t)}{\partial x}$$

Valószínűségi áramsűrűség

A növekmények eloszlása

Legyen $x(t') = x'$ a $t = t'$ időpontban. Mekkora lesz a t időpontig elért növekmény, $x(t) - x(t')$, illetve annak $\left\langle (x(t) - x(t'))^n \right\rangle$ momentumai?

Független minden t'-t megelőző időponttól, csak $P(x, t|x', t')$ határozza meg.

$$x(t+s) = x \qquad \mathcal{T}_{t+s,t} = \mathcal{I} + \mathcal{A}_t\, s$$

$$x(t) = x' \qquad P(x, t+s)|x', t) = \delta(x - x') + s\mathcal{A}_t$$

$$\int f(x) P(x, t+s|x', t)\, dx = f(x') + \mathcal{A}_t\, f(x') s + \mathcal{O}\left(s^2\right)$$

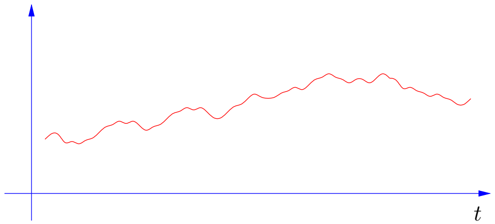
$$\mathcal{A}_t\, f(x') = b(x', t) f'(x', t) + \frac{1}{2}\sigma^2(x', t) f''(x', t)$$

$$f(x) = (x - x')^n$$

$$\int (x-x')^n P(x,t+s|x',t)\,dx = \begin{cases} b(x',t)s + \mathcal{O}\left(s^2\right), & \text{ha } n=1 \\ \sigma^2(x',t)s + \mathcal{O}\left(s^2\right), & \text{ha } n=2 \\ \mathcal{O}\left(s^2\right), & \text{ha } n>2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ diffúziós folyamatról beszélünk, ha a növekmények $n > 2$ momentumai így viselkednek.

Trajektóriák:



A derivált, $\dot{x}(t)$ viselkedése

$$\langle \dot{x}(t) \rangle \approx \lim_{s\to 0} \frac{\langle x - x' \rangle}{s} = b(x',t) \quad \text{véges, de}$$

$$\langle \ddot{x}(t) \rangle \approx \lim_{s\to 0} \frac{\left\langle (x - x')^2 \right\rangle}{s^2} \approx \frac{\sigma^2(x',t)}{s} \quad \text{divergál.}$$

Wiener-folyamat: az

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \qquad D > 0$$

által generált Markov-folyamat.

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{D}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

$$P(x, t | x', t) = \delta(x - x')$$

$$P(x, t | x', t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-x')} \, dk$$

$$P \sim e^{ikx - \alpha t}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\alpha P \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = -k^2 P$$

$\boxed{\alpha = \frac{1}{2} D k^2}$ esetén megoldás

$$P \sim e^{ikx - \frac{1}{2}Dk^2 t}$$

$$P(x,t|x',t') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-x') - \frac{1}{2}Dk^2(t-t')}\,dk$$

Gauss integrálás:

$$P(x,t|x',t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi D(t-t')}} e^{-\frac{(x-x')^2}{2D(t-t')}}$$

A növekmény $(x - x')$ normális eloszlású 0 várható értékkel és $\sqrt{D(t-t')}$ szórással.

$D = 1$ esetén jelöljük a trajektóriát $x(t) = w(t)$-vel, és legyen $w(0) = 0$.

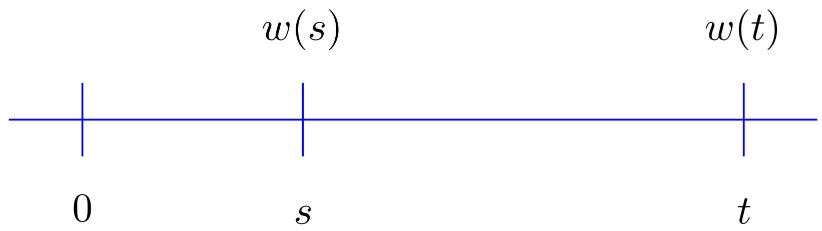
$$\langle w(t) \rangle = 0$$

$$\left\langle w^2(t) \right\rangle = t$$

(standart) Wiener-folyamat.

Korrelációs függvény

A növekmények függetlenek



$$\Big\langle \left(w(t) - w(s)\right)\left(w(s) - w(0)\right) \Big\rangle = 0$$

$$\langle w(t)w(s) \rangle - \left\langle w^2(s) \right\rangle = 0$$

$$\langle w(t)w(s) \rangle = \left\langle w^2(s) \right\rangle = s \qquad \text{ha } s < t$$

$$\boxed{\langle w(t)w(s) \rangle = \min(t, s)}$$

Ornstein–Uhlenbeck-folyamat

$$b(x,t) = -\lambda x \qquad \text{drift}$$
$$\sigma^2(x,t) = D > 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \lambda \frac{\partial}{\partial x}(xP) + \frac{1}{2} D \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$
$$P(x,t|x',0); P(x,0|x',0) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-x')}\,dk = \delta(x-x')$$

Oldjuk meg a Fokker–Planck-egyenletet $u(x) = e^{ik(x-x')}$ kezdeti feltételre!

$$\tilde{u}(k,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} u(x,t)\,dx$$
$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}\tilde{u}(k,t)\,dk$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \frac{\partial \tilde{u}(k,t)}{\partial t} \, dx$$

$$x\frac{\partial u}{\partial x} = x\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}\tilde{u}(k,t)\, dk = x\int_{-\infty}^{+\infty} ik\, e^{ikx}\tilde{u}(k,t)\, dk =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ik\frac{\partial}{i\partial k}e^{ikx}\right] \tilde{u}(k,t)\, dk =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{\frac{\partial}{\partial k}k\, e^{ikx}\tilde{u}(k,t) - k\, e^{ikx}\frac{\partial \tilde{u}(k,t)}{\partial k} - e^{ikx}\tilde{u}(k,t)\right\} dk =$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \left(\tilde{u}(k,t) + k\frac{\partial \tilde{u}(k,t)}{\partial k}\right) dk$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} -k^2\, e^{ikx}\tilde{u}(k,t)\, dk$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \lambda \frac{\partial}{\partial x}(x\, u) - \frac{1}{2} D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \left\{ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - \lambda \tilde{u} + \lambda \tilde{u} + \lambda k \frac{\partial \tilde{u}}{\partial k} \frac{1}{2} D k^2 \tilde{u} \right\} = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = -\lambda k \frac{\partial \tilde{u}}{\partial k} - \frac{1}{2} D k^2 \tilde{u}}$$

$$\tilde{u}(k,t) = \Phi(k\, e^{-\lambda t}, t) = \Phi(z,t) \qquad z = k\, e^{-\lambda t}$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \left(-k\lambda\, e^{-\lambda t}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\lambda z \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial k} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} e^{-\lambda t}$$

$$\cancel{-\lambda z \frac{\partial \Phi}{\partial z}} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \cancel{-\lambda z \frac{\partial \Phi}{\partial z}} - \frac{1}{2} D k^2 \Phi$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{1}{2} D k^2 \Phi = -\frac{D}{2} z^2 e^{2\lambda t} \Phi$$

Kezdeti feltétel: $\tilde{u}(k,0) = e^{-ikx'}$; $\qquad \Phi(z,0) = e^{-izx'}$

Megoldás:

$$\Phi(z,t) = e^{-izx' - \frac{D}{4\lambda} z^2 \left(e^{2\lambda t} - 1\right)}$$

$$\tilde{u}(k,t) = e^{-ik\, e^{-\lambda t} x' - \frac{D}{4\lambda} k^2 \left(1 - e^{-2\lambda t}\right)}$$

$$P(x,t|x',0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\left(x - e^{-\lambda t} x'\right)} e^{-\frac{D}{4\lambda} k^2 \left(1 - e^{-2\lambda t}\right)}\, dk =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi V^2(t)}} \exp\left\{ -\frac{\left(x - x' e^{-\lambda t}\right)^2}{2 V^2(t)} \right\}$$

$$V^2(t) = \frac{D}{2\lambda}\left(1 - e^{-2\lambda t}\right) \approx Dt$$

$$\langle x(t) \rangle = x' e^{-\lambda t}$$

$$\left\langle x^2(t) \right\rangle - \langle x(t) \rangle^2 = V^2(t)$$

$$\lim_{t \to \infty} P(x, t | x', 0) = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi D}} e^{-\frac{\lambda x^2}{D}} = P^*(x)$$

ergodikus folyamat, a fenti normális eloszláshoz konvergál.

Korrelációs függvénye:

$$C(t) = \langle x(t) x(0) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x x' P_2(x, t; x', 0) \, dx \, dx'$$

$$P_2(x, t; x', 0) = P(x, t | x') P^*(x')$$

$$\boxed{C(t) = \frac{D}{2\lambda} e^{-\lambda |t|}}$$

Fehér zaj és a Langevin-egyenlet

$\xi(t)$ fehér zaj, ha

1. $\langle \xi(t) \rangle = 0$,
2. $S(\omega) =$ állandó

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} C(t) e^{i\omega t}\, dt = \text{áll.} \quad \Rightarrow \quad C(t) = \langle \xi(t)\xi(0) \rangle = \delta(t)$$

Tekintsük az $x(t) = \displaystyle\int_0^t \xi(s)\, ds$ folyamatot!

$$\langle x(t) \rangle = \int_0^t \langle \xi(s) \rangle \; ds = 0$$

$$\left\langle \int_0^t \xi(u)\, du \int_0^s \xi(v)\, dv \right\rangle = \int_0^t \int_0^s \langle \xi(u)\xi(v) \rangle \; du\, dv =$$

$$= \int_0^t \int_0^s \delta(u-v)\, du\, dv = \min(s,t)$$

$$w(t) = \int_0^t \xi(s)\, ds \quad \text{Wiener-folyamat}$$

$$dw(t) = \xi(t)\, dt$$

Fehér zaj előállítása

Pl.: Ornstein–Uhlenbeck-folyamatból

$$C(t) = \frac{D}{2\lambda} e^{-\lambda|t|}$$

$\lambda \to \infty$ és $D/\lambda^2 \to 1$ esetén

$$C(t) = \frac{D}{\lambda^2} \cdot \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|t|} \quad \Rightarrow \quad \delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|t|}\, dt = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\, dt = 1$$

Sztochasztikus differenciálegyenletek

$$\dot{x}(t) = f(x(t), y(t), t)$$

ahol $y(t)$ ismert tulajdonságú véletlen folyamat.

Langevin-egyenlet

$$\dot{x}(t) = b(x(t), t) + \sigma(x(t), t) \underbrace{\xi(t)}_{\text{fehér zaj}}$$

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} b(x(s), s)\, ds + \int_{t_o}^{t} \sigma(x(s), s) \underbrace{\xi(s)\, ds}_{\substack{dw(s) \\ \text{Wiener-folyamat}}}$$

$$dx(t) = b(x(t), t)\, dt + \sigma(x(t), t)\, dw(t)$$

$$\int_{t_0}^{t} G(s)\, dw(s) \qquad \text{Sztochasztikus integrál}$$

Ito-féle sztochasztikus differenciálegyenlet

A Langevin-egyenlet értelmezése többféle lehet.

Ito-féle értelmezés:

$$dx(t) = x(t+dt) - x(t) = b(x(t),t)\,dt + \sigma(\underbrace{x(t)}_{\text{lényeges!}},t)\,\{w(t+dt) - w(t)\}$$

Ito-SDE

$$\begin{aligned}
\langle dw(t)\rangle &= 0 \qquad \text{Normális eloszlású} \\
\left\langle dw(t)^{2n}\right\rangle &= 1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)(dt)^n \qquad n \geqslant 1 \\
\left\langle dw(t)^2\right\rangle &= dt \\
\left\langle dw(t)^4\right\rangle - \left\langle dw(t)^2\right\rangle^2 &= 2(dt)^2
\end{aligned}$$

Ha $\mathcal{O}\left(dt^2\right)$-et elhagyjuk, akkor elég mindig $(dw(t))^2$-et dt-vel helyettesíteni.

$$dt\, dw(t)^2 = 0$$

$$dw(t)^n = 0 \qquad n > 2$$

$$df(x(t)) = f(x(t) + dx(t)) - f(x(t)) =$$

$$= f'(x(t))\, dx(t) + \frac{1}{2} f''(x(t))(dx(t))^2 + \dots$$

$$df(x(t)) = f\big(x(t) + b(x(t),t)\, dt + \sigma(x(t),t)\, dw(t)\big) - f(x(t)) =$$

$$= f'(x(t))\, b(x(t),t)\, dt$$

$$+ f'(x(t))\, \sigma(x(t),t)\, dw(t) +$$

$$+ \frac{1}{2} f''(x(t))\, \sigma^2(x(t),t)\, \underbrace{dt}_{dw(t)^2} + \mathcal{O}\left((dt)^2\right)$$

Ito-formula, helyettesíti a közönséges differenciálást

$$
\begin{aligned}
\langle f(x(t+dt))\rangle &= f(x') + \mathcal{A}_t\, f(x')\, dt + \mathcal{O}\left(dt^2\right) = \\
&= f(x') + b(x',t)\, f'(x')\, dt + \frac{1}{2}\sigma^2(x',t)\, f''(x')\, dt \\
&\Rightarrow \quad \mathcal{A}_t = b(x',t)\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{1}{2}\sigma^2(x',t)\frac{\partial^2}{\partial {x'}^2}
\end{aligned}
$$

Ito–SDE $\equiv$ Fokker–Planck-egyenlet

Stratonovich–SDE

$$dx(t) = b(x(t),t)\,dt + \sigma(x(t),t)\,dw(t)$$

$$dx(t) = x(t+dt) - x(t) = b(x(t),t) +$$

$$+\,\sigma\left(\frac{x(t)+x(t+dt)}{2}, t\right)\big(w(t+dt) - w(t)\big) + \ldots$$

$$\sigma\left(\frac{x(t)+x(t+dt)}{2}, t\right) = \sigma(x(t),t) + \frac{1}{2}\sigma'(x(t),t)\,dx(t) + \ldots$$

$$dx(t) = \left[b(x(t),t) + \frac{1}{2}\sigma(x(t),t)\sigma'(x(t),t)\right]dt + \sigma(x(t),t)\,dw(t) + \ldots$$

$$\mathcal{A}_t = \left[b(x,t) + \frac{1}{2}\sigma(x,t)\sigma'(x,t)\right]\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$\sigma'(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\sigma(x,t)$$

Ha $\sigma(x,t) = \sigma(t)$, akkor Ito $=$ Stratonovich

A diffúziós egyenlet stacionárius megoldása

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\big(b(x,t)P(x,t)\big) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\big(\sigma(x,t)P(x,t)\big)$$
$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}J(x,t)$$
$$J(x,t) = \left[b(x,t) - \sigma(x,t)\frac{\partial\sigma(x,t)}{\partial x}\right]P(x,t) - \frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\frac{\partial P(x,t)}{\partial x}$$

stacionárius megoldás $t \to \infty$ esetén $P(x,t) \to P^*(x)$
(ha ergodikus, akkor egyértelmű)

$$\frac{\partial P^*}{\partial t} = 0 = \frac{\partial}{\partial x}J^*(x,t)$$
$$J^*(x,t) = \text{állandó}$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} P^*(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad J^*(x,t) = 0$$

$$\varphi(x) = -\ln P^*(x)$$

$$P^*(x) = e^{-\varphi(x)}$$

$$0 = \left[b(x) - \sigma(x)\frac{d\sigma(x)}{dx}\right] e^{-\varphi(x)} - \frac{1}{2}\sigma^2(x)\left\{-\varphi'(x)\right\} e^{-\varphi(x)}$$

$$b(x) = \sigma(x)\frac{d\sigma(x)}{dx} - \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{d\varphi(x)}{dx}$$

A drift kifejezhető az egyensúlyi eloszlás segítségével.

Példa: Folyadékban mozgó kicsiny gömb

$$\dot{v} = -\lambda v \qquad \text{(Stokes)}; \qquad \lambda = \frac{6\pi\eta r_0}{m}$$

lökdösődés: $\dot{v} = -\lambda v + \underbrace{\sigma\xi(t)}_{\text{fehér zaj}}$

Sztochasztikus differenciálegyenlet:

$$dv(t) = -\lambda v(t)\,dt + \sigma\,dw(t)$$

Mekkora lehet σ, ha a stacionárius eloszlás Maxwell–Boltzmann?

$$P^*(v) \sim e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

$$\varphi(v) = -\ln P^*(v) = \frac{mv^2}{2kT} + \text{állandó}$$

$$-\lambda v = -\frac{1}{2}\sigma^2 \frac{d\varphi(v)}{dv} = -\frac{1}{2}\sigma^2 \frac{mv}{kT}$$

$$\lambda = \frac{1}{2}\frac{m}{kT}\sigma^2$$

$$\sigma^2 = \frac{2kT\lambda}{m} = \frac{12\pi\eta r_0 kT}{m^2}$$

Einstein-reláció: a drift és a diffúziós állandó összekapcsolása a hőmérsékleten keresztül.

Véletlen mátrixok

- M_{ij} $N \times N$-es mátrix, minden eleme véletlen eloszlású

$$P(M_{11}, M_{12}, M_{13}, \ldots, M_{1N}, M_{21}, M_{22}, \ldots, M_{2N}, \ldots, M_{NN}) \times$$
$$\times\, dM_{11}\, dM_{12} \cdots dM_{NN}$$

- Legyen ismert az elemek eloszlása. Milyen a sajátértékek eloszlása?

$$\lambda_i v_i = M_{ij} v_j, \qquad \lambda_1, \ldots, \lambda_N$$

- Pl.: rezgőkör (ω_i^2), mechanikai rezgések, kvantummechanikai energiaszintek ($H_{ij} \leftrightarrow E_n$)
- Általában nem lehet megoldani, de tehetünk rezonábilis feltevéseket

- $M' = SMS^{-1}$ hasonlósági transzformáció
  példa: M szimmetrikus ($M_{ij} = M_{ji}$) és valós,
  $S = O$ (forgatás) ortogonális transzformáció
  hasonlósági transzformáció $\longrightarrow$ helyben hagyja a sajátértékeket

- legyen az eloszlás ugyanolyan minden koordinátarendszerben
  $\Rightarrow$ az eloszlás csak invariánsoktól függhet

$$\mathrm{Tr}\, M' = \mathrm{Tr}\, SMS^{-1} = \mathrm{Tr}\, MS{-}1S = \mathrm{Tr}\, M$$

$$\mathrm{Tr}\, M'^{n} = \mathrm{Tr}\, SMS^{-1}SMS^{-1} \cdots SMS^{-1} = \mathrm{Tr}\, SM^{n}S^{-1} = \mathrm{Tr}\, M^{n}$$

- legyen az eloszlás „Gauss-jellegű” $(\ldots e^{-x^2/2\sigma^2})$;
  $\Rightarrow$ kvadratikus invariánsok $(\mathrm{Tr}\, M)^2$ és $\mathrm{Tr}\, M^2$

$$p(M)\, dM = \mathcal{N} e^{-\beta\, \mathrm{Tr}\, M^2}\, dM$$

$$\langle \mathrm{Tr}\, M \rangle = 0$$

Vegyük a legegyszerűbb esetet $N = 2$ és bízzunk benne, hogy jó $N \to \infty$ esetén is

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Tr}\, M = A + C \qquad\qquad \text{GOE}$$

$$\mathrm{Tr}\, M^2 = A^2 + 2B^2 + C^2 \quad \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^2+B^2 & AB+BC \\ AB+BC & B^2+C^2 \end{pmatrix}$$

$$p(M)\, dM = \mathcal{N} e^{-\beta\left(A^2+2B^2+C^2\right)}\, dA\, dB\, dC$$

$$\mathcal{N} \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta\left(A^2+2B^2+C^2\right)}\, dA\, dB\, dC = \mathcal{N} \frac{\pi^{3/2}}{\beta^{3/2}\sqrt{2}} = 1$$

$$p(M)\, dM = \frac{\beta^{3/2}\sqrt{2}}{\pi^{3/2}} e^{-\beta\left(A^2+2B^2+C^2\right)}\, dA\, dB\, dC$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{A + C \pm \sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}}{2}$$

$$\begin{pmatrix} dA \\ dC \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\lambda_1-\lambda_2}{\sqrt{(\lambda_1-\lambda_2)-4B^2}} & \frac{1}{2} - \frac{\lambda_1-\lambda_2}{\sqrt{(\lambda_1-\lambda_2)-4B^2}} \\ \frac{1}{2} - \frac{\lambda_1-\lambda_2}{\sqrt{(\lambda_1-\lambda_2)-4B^2}} & \frac{1}{2} + \frac{\lambda_1-\lambda_2}{\sqrt{(\lambda_1-\lambda_2)-4B^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\lambda_1 \\ d\lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$dA\,dC = 4\frac{|\lambda_1-\lambda_2|}{\sqrt{(\lambda_1-\lambda_2)^2-4B^2}}\,d\lambda_1\,d\lambda_2$$

$$p(M)\,dM = \mathcal{N}e^{-\beta\left(\lambda_1^2+\lambda_2^2\right)} \cdot 4\frac{|\lambda_1-\lambda_2|}{\sqrt{(\lambda_1-\lambda_2)^2-4B^2}}\,d\lambda_1\,d\lambda_2\,dB$$

$$|B| < |\lambda_1 - \lambda_2|/2$$

$$p(\lambda_1,\lambda_2)\,d\lambda_1\,d\lambda_2 = \int_{-\frac{|\lambda_1-\lambda_2|}{2}}^{\frac{|\lambda_1-\lambda_2|}{2}} 4\mathcal{N}e^{-\beta\left(\lambda_1^2+\lambda_2^2\right)}\,\frac{|\lambda_1-\lambda_2|}{\sqrt{(\lambda_1-\lambda_2)^2-4B^2}}\,dB\,d\lambda_1\,d\lambda_2$$

$$B = \frac{|\lambda_1-\lambda_2|}{2}u \quad \text{helyettestéssel}$$

$$\frac{|\lambda_1-\lambda_2|}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \frac{|\lambda_1-\lambda_2|}{2}\pi \quad \text{átalakítás után}$$

$$p(\lambda_1, \lambda_2) = \mathcal{N}' e^{-\beta\left(\lambda_1^2+\lambda_2^2\right)} |\lambda_1 - \lambda_2|$$

Általános esetben

$$p(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \sim e^{-\beta \sum_{n=1}^{N} \lambda_i^2} \prod_{i>j} |\lambda_i - \lambda_j|^\alpha$$

GOE	$\alpha = 1$	szimmetrikus	(ortogonális sokaság)
GUE	$\alpha = 2$	önadjungált	(unitér)

Milyen $\lambda_1 - \lambda_2$ eloszlása? $s = \lambda_1 - \lambda_2, \qquad \Lambda = \lambda_1 + \lambda_2$

$$p(\lambda_1, \lambda_2)\, d\lambda_1\, d\lambda_2 = p(s, \Lambda)\, ds\, d\Lambda = \frac{1}{2}\mathcal{N}' e^{-\beta \frac{1}{2}\left(\Lambda^2+s^2\right)} s\, ds\, d\Lambda$$

$$p(s)\, ds = \int p(s, \Lambda)\, d\Lambda = \frac{1}{2}\mathcal{N}' \sqrt{\frac{2\pi}{\beta}} e^{-\frac{\beta s^2}{2}} s\, ds$$

$$\boxed{p(s) = \frac{\pi s}{2} e^{-\pi s^2/4}} \qquad \text{Wigner-eloszlás}$$

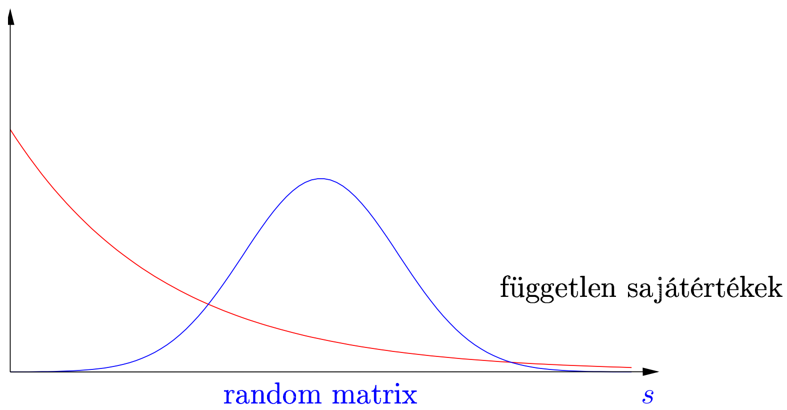
Milyen volna két független sajátérték eloszlása?

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda_1, \lambda_2) = \mathcal{N} e^{-\beta\lambda_1^2} e^{-\beta\lambda_2^2}\, d\lambda_1\, d\lambda_2$$

$$p(s, \Lambda)\, ds\, d\Lambda = \mathcal{N} \frac{1}{2} e^{-\frac{\beta}{2}\left(\Lambda^2 + s^2\right)}\, d\Lambda\, ds$$

$$p(s) \sim e^{-s^2}; \quad N \times N\text{-es esetben} \quad p(S) = e^{-S}$$



A sajátértékek taszítják egymást.